最优控制的数学理论

王康宁 著

国防工业出版社

最优控制的数学理论

王康宁 著

国防工业出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

最优控制的数学理论/王康宁著.—北京:国防工业出版社,1995.10
ISBN 7-118-01416-8

Ⅰ.最… Ⅱ.王… Ⅲ.自动控制:最佳控制-数学理论
Ⅳ.TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 03584 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码 100044)
国防工业出版社印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 850×1168 1/32 印张 10⅜ 269 千字
1995 年10月第 1 版 1995 年10月北京第 1 次印刷
印数:1—4000 册 定价:14.40 元

致　读　者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分，又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展，加强社会主义物质文明和精神文明建设，培养优秀科技人才，确保国防科技优秀图书的出版，国防科工委于 1988 年初决定每年拨出专款，设立国防科技图书出版基金，成立评审委员会，扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是：

1. 学术水平高，内容有创见，在学科上居领先地位的基础科学理论图书；在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2. 学术思想新颖，内容具体、实用，对国防科技发展具有较大推动作用的专著；密切结合科技现代化和国防现代化需要的高新技术内容的专著。

3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值，密切结合科技现代化和国防现代化需要的新工艺、新材料内容的科技图书。

4. 填补目前我国科技领域空白的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

5. 特别有价值的科技论文集、译著等。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展工作，负责掌握出版基金的使用方向，评审受理的图书选题，决定资助的图书选题和资助金额，以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书，由国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承

担着记载和弘扬这些成就，积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下，国防科工委率先设立出版基金，扶持出版科技图书，这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版，随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物，是对出版工作的一项改革。因而，评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进，这样，才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授，以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来，为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗！

国防科技图书出版基金
评审委员会

国防科技图书出版基金

第二届评审委员会组成人员

前　　言

系统是为完成一定任务的一些相互关联部件的组合。控制科学是关于修改动力学系统的行为，以实现预期目标的科学。控制理论在于寻求以定量方式描述的很多领域中所遇到的广泛的问题，主要是可以精确地进行数学描述的问题。控制理论处于数学、工程科学和计算机科学相互作用的领域。

现代控制理论是在20世纪50年代由于空间科学技术和武器系统的制导、导航科学技术的发展，需要研究多输入多输出系统、时变系统和非线性系统的控制，在引入状态空间与状态变量的概念和广泛地应用现代数学的思想、方法和知识的基础上发展起来的。控制理论的基础研究，是寻求以精确的数学语言来阐明控制的基本原理及对于可获得的结果的限制。控制理论的基础理论部分，是控制理论的数学理论。控制理论的应用研究，在于建立先进的自动控制系统的分析和设计方法，以及把控制规律转化为计算机控制算法和软件。

控制理论的核心主题有三个：一是系统的辨识；二是系统的反馈；三是系统控制的优化。系统的辨识是用系统的输出信息来确定系统的结构或系统的参数，系统的参数辨识与数学中的逆问题密切关联，并且出现了在数学上称为不适定性问题。系统的反馈是一种基于对输出的同时观测来确定系统的输入的控制方法，输入输出都是随时间变化的。反馈在于可获得输出与其预期值的实时比较，以得到误差的一种度量，然后以此量确定输入，这个输入将减少误差，并且得到一个闭环路，从而产生了一个包含原有系统在内的新的动力学系统，称为闭环系统。系统控制的优化问题是控制动力学系统的行为，以实现预期的目标，可以表述为一个性能指标的

最优化(最小化或最大化)。性能指标是刻划一段时间上系统的预期行为和实际行为之差的数学量,要求是一个时间的函数,使得性能指标达到最小的控制,称为最优控制。

20世纪50年代,原苏联的一些数学家和工程师组成的研究小组,在原苏联院士,L. S. Pontryagin的领导下,开展了对非线性系统的时间最优控制问题的研究,导致了Pontryagin关于动力系统的最优轨道的最大值原理的发现。最大值原理开创了在状态与控制都存在约束的条件下,用不连续的控制函数来系统地研究最优轨道的方法。最优轨道的最大值原理的意思是,性能指标优化的非线性系统的最优控制,使得该系统相应的Hamiltonian函数沿最优轨道达到最大值。最大值原理指出了对非线性系统求综合控制反馈律的一般原则,特别是对二阶常系数线性系统的综合控制化成在平面上求开关曲线而得以解决。最优控制这一主题的数学思想根源是变分学。最优控制研究的是在闭域上的变分问题,通过引入开关函数和快速振荡函数的新思想,使变分学获得了新的生机。用数学理论来表达的最优轨道的最大值原理,其最有意义的贡献是,在60年代初推动了最优轨道数值方法的大规模的研究工作。这些研究工作,导致了许多空间项目轨道的成功设计。最优控制理论的研究和Pontryagin最大值原理的出现,从控制理论的科学思想、方法和内容,以及后来达到的成功的应用,都是控制理论划时代的进步,标志着控制理论发展的一个新阶段与里程碑。

20世纪50年代,R. Bellman的动态规划原理和方法的出现,为系统的最优控制的研究提供了新的思路和方法。从概念上讲,动态规划方法把原来的动态系统的最优控制问题,考虑成按动态系统的初始状态参数化了的一族控制系统的最优控制问题。它的数学内容是这一族的动态系统的最优控制问题的性能指标的最优值函数满足一个称为Hamilton-Jacobi-Bellman(缩写为HJB)偏微分方程。一旦求得这个HJB偏微分方程的解,则可求得最优反馈控制律、最优控制和性能指标的最优值。20世纪80年代初期,对于HJB偏微分方程的粘性解概念的引入,给出了一个不可微的甚至

不连续的函数作为HJB偏微分方程的解的精确意义。粘性解的概念提供了一个简单的准则来确定解的唯一性，以及在摄动的情况下的稳定性。由于对HJB偏微分方程的粘性解概念的引入和粘性解的存在性与唯一性的解决，使得最优控制理论的动态规划方法这一理论出现了有意义的新进展和有严格的数学理论基础。最优控制理论的动态规划方法的重要性，在于HJB偏微分方程理论提供了开环和反馈之间的一种联系。

动态规划方法最初是用来研究确定性动态系统的最优控制问题，所建立的HJB偏微分方程是极值型的非线性一阶偏微分方程。其后，动态规划方法成为研究具有完全观测信息的随机系统的最优控制的基本工具。对于随机系统的最优控制问题所建立的HJB偏微分方程，是极值型的非线性二阶偏微分方程。

本书将阐述控制理论的三个核心主题之一的动态系统的最优控制问题的数学理论。依据最优控制理论发展的历史线索，系统地阐述集中参数系统、分布参数系统和用Itô随机微分方程描述的随机系统的最优控制问题的状态空间法和动态规划法所建立的数学理论。主要是阐述分布参数系统与随机系统的最优控制的数学理论。内容涉及从20世纪50年代至90年代初期这30多年间的最优控制理论的基本结果和方法。上述三大类系统是本质上不同的系统。集中参数系统是具有有穷个自由度的物理系统，用数学语言讲，是用常微分方程描述的系统；分布参数系统是具有无穷个自由度的物理系统，用数学语言来表达，是用偏微分方程或偏微分积分方程描述的系统；随机系统是具有可用随机变量或随机过程描述的不确定性因素干扰的系统。在发展的历史上，研究这三大类系统的最优控制问题的数学工具是很不相同的，彼此独立地发展。本书对这三大类系统的最优控制问题的状态空间法，用I. Ikeland的近似极小点理论和泛函分析方法作了观点上和方法上的统一阐述。对于集中参数系统和具有完全观测信息的随机系统的最优控制理论动态规划方法的阐述中，用非线性算子半群理论来导出HJB偏微分方程，用80年代发展起来的粘性解的概念和理论来讨

论 HJB 偏微分方程的解的存在性与唯一性问题。全书涉及到的数学工具有泛函分析、Sobolev 空间与算子半群、发展方程的理论、随机分析与鞅的理论和常微分方程的解的理论，以及其他的一些数学知识。在阐述这三大类系统的最优控制问题的状态空间法和动态规划法的数学理论时，泛函分析的思想和方法是最基本的。

本书第一章以新的观点和方法来论述集中参数系统的最优控制的状态空间法。第二章用非线性算子半群与粘性解的理论来阐述集中参数系统的最优控制的动态规划法的理论。第三章论述分布参数系统的最优控制理论。第四章和第五章分别阐述具有完全观测信息的用 Itô 随机微分方程描述的随机系统的最优控制的状态空间法和动态规划法的理论。第六章论述具有部分观测信息的用 Itô 随机微分方程描述的随机系统的最优控制理论。第七章阐述随机分布参数系统最优控制的理论。

本书中的集中参数系统与分布参数系统的最优控制理论，曾对研究生作为《最优控制理论》课讲授过。由于书中材料较新，在写作过程中没有现成的书籍可以借鉴，许多结果和证明是作者给出的，因此，难免有疏漏错误之处，欢迎读者批评指正。

王康宁

目　　录

第一章　集中参数系统的最优控制
（状态空间法）

动态系统的最优控制问题是从大量的实际问题中提出来的。从航天、航空的科学技术中、生产过程的控制中和人类活动的其他领域中，都提出了对一个系统要求其性能指标为最优的控制问题。集中参数系统，是指具有有穷个自由度的物理系统（指广义的物理系统）。换言之，如果用有穷个参数就能描述一个物理系统在每一个瞬时的状态，称这个系统为集中参数系统。用数学语言讲，集中参数系统是用常微分方程组来描述其运动规律的系统。集中参数系统的最优控制的基本问题是，寻求使得动态系统的性能指标达到最优的控制和相应于这个控制的动态系统的轨线，这样的控制和轨线称为最优控制和最优轨线。研究集中参数系统的最优控制问题的基本的数学方法有状态空间法和动态规划法。本章是以新的观点和方法来论述集中参数系统的最优控制的状态空间法。状态空间法的含义是，除了描述系统的状态变量外，还引入另一组变量，即协态变量和协态过程满足的常微分方程组，称为动态系统的伴随系统。对于一个集中参数系统的最优控制问题，引入一个相应的用状态变量、协态变量和控制变量来表达的 Hamiltonian 函数。对于集中参数系统的最优控制理论的开创性工作中，L. S. Pontryagin[1]等人研究的以动态系统的轨线的过渡时间为性能指标的快速控制问题，用拓扑学中的指数定理来证明了最优控制使得 Hamiltonian 函数沿最优轨线达到最大值的著名的最大值原理。在本世纪 70 年代，R. V. Gamkrelidze 在测度论的基础上，引入广义控制概念，用分析方法，证明了快速控制问题的最大值原理。本章用状态空间法来研究具有积分型性能指标的最优控制问题时，不用

已有的著作中证明最大值原理的方法，而用在本书的前言中所述的 I. Ekeland 的近似极小点定理来证明最优控制问题的最大值原理。

§1.1　问题的叙述

设一个受控对象的运动规律用 n 阶常微分方程组来描述

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=f(t,x,u) \tag{1.1.1}$$

其中

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in R^n$$

称为状态变量，R^n 表示 n 维欧氏空间，而

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_r\end{pmatrix}\in R^r$$

称为控制变量。向量

$$f(t,x,u)=\begin{pmatrix}f^1(t,x,u)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ f^n(t,x,u)\end{pmatrix}\in R^n$$

称为状态速度。

方程组(1.1.1)的初始状态已知为

$$x(0)=x_0\in R^n \tag{1.1.2}$$

假定 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$是定义在 $1+n+r$ 维欧氏空间 R^{1+n+r}的子集$\{(t,x,u)\mid t\in[0,T],(x,u)\in R^n\times R^r\}$上的一个向量值连续函数，关于 x 连续可微

$$\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial x}=\left(\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial x_n}\right)$$

设 U 是控制变量的空间 R^r 中的一个给定的集合，它是控制变量 u 的容许值的集。定义函数类

$U_{ad}=\{u(t)\,|\,u(\cdot):[0,T]\to R^r$ 是有界可测函数，$u(t)\in U$，a. e. $t\in[0,T]\}$

称函数类 U_{ad} 为容许控制类，U_{ad} 中的每一个函数 $u(t)$ 称为容许控制。

对于给定一个容许控制 $u(\cdot)\in U_{ad}$，受控对象的轨道唯一地由微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x,u(t))$$

$$x(0)=x_0$$

确定，上述微分方程组的解 $x(t)$，$t\in[0,T]$ 称为受控对象相应于控制 $u(t)$ 的轨道。在下面有时用记号 $\dot{x}(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ 表示 $x(t)$ 对时间 t 的导数。

已给函数 $f^0(t,x,u)$ 和 $h(x)$：

$$f^0(\cdot,\cdot,\cdot):[0,T]\times R^n\times R^r\to R^1$$

$$h(\cdot):R^n\to R^1$$

受控系统(1.1.1)—(1.1.2)的性能指标为

$$J(u(\cdot))=h(x(T))+\int_0^T f^0(t,x(t),u(t))\mathrm{d}t \qquad (1.1.3)$$

具有性能指标为(1.1.3)的系统(1.1.1)—(1.1.2)的最优控制问题，是要寻求一个容许控制 $u^*(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$J(u^*(\cdot))=\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} J(u(\cdot)) \qquad (1.1.4)$$

称 $u^*(\cdot)$ 为最优控制。相应于最优控制 $u^*(t)$ 的微分方程组(1.1.1)—(1.1.2)的解 $x^*(t)$，$t\in[0,T]$，称为最优控制问题的最优轨道。

当 f 和 f^0 都不含时间 t 时，相应的最优控制问题，称为定常系统的最优控制问题。反之，称为非定常系统的最优控制问题。

§1.2 几个引理

本节我们将要证明几个引理。在后面证明集中参数系统、分布参数系统和随机系统的最优控制的最大值原理时，这几个引理起着关键性的作用。

引理 1.1 设(S,ρ)是一个完备的距离空间，$f(\cdot):S\to R^1$是有下确界的下半连续函数，$\forall\ \varepsilon>0, x_\varepsilon\in S$，使得

$$f(x_\varepsilon) < \inf_{x\in S} f(x) + \varepsilon$$

则存在点$y_\varepsilon\in S$，使得

(1)$f(y_\varepsilon)\leqslant f(x_\varepsilon)$

(2)$\rho(y_\varepsilon,x_\varepsilon)\leqslant\varepsilon^{1/2}$

(3)$f(x)\geqslant f(y_\varepsilon)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_\varepsilon,x)\quad\forall\ x\in S$

证 逐步定义$y_n(n=0,1,\cdots)$如下：令$y_0=x_\varepsilon$。如果y_n已知，用下面的方法定义y_{n+1}：

(1)如果$\forall\ z\in S\backslash\{y_n\}$，$f(z)>f(y_n)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,z)$，则取$y_{n+1}=y_n$；

(2)如果$y\in S\backslash\{y_n\}$，使得

$$f(y)\leqslant f(y_n)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y)$$

令

$$S_n=\{y\,|\,y\in S, f(y)\leqslant f(y_n)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y)\}$$

取$y_{n+1}\in S_n$，使得

$$f(y_{n+1})-\inf_{x\in S_n} f(x)\leqslant\frac{1}{2}\{f(y_n)-\inf_{x\in S_n} f(x)\}\qquad(1.2.1)$$

不等式(1.2.1)等价于下面的不等式

$$f(y_{n+1})\leqslant\frac{1}{2}f(y_n)+\frac{1}{2}\inf_{x\in S_n} f(x)\qquad(1.2.2)$$

满足不等式(1.2.2)的$y_{n+1}\in S_n$是存在的。事实上，如果式(1.2.2)不成立，即是

$$f(y_{n+1})>\frac{1}{2}f(y_n)+\frac{1}{2}\inf_{x\in S_n} f(x)\quad\forall\ y_{n+1}\in S_n\quad(1.2.3)$$

由假设 $y_{n+1}\in S_n$ 满足不等式

$$f(y_{n+1})\leqslant f(y_n)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y_{n+1})\qquad(1.2.4)$$

用式(1.2.4)代入式(1.2.3)，得

$$f(y_{n+1})>\frac{1}{2}f(y_{n+1})+\frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y_{n+1})$$

$$+\frac{1}{2}\inf_{x\in S_n}f(x)\quad\forall\, y_{n+1}\in S_n$$

即 $$f(y_{n+1})>\inf_{x\in S_n}f(x)+\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y_{n+1})\quad\forall\, y_{n+1}\in S_n$$

这个不等式与下确界

$$\inf_{x\in S_n}f(x)$$

的定义矛盾。因此，满足不等式(1.2.1)的 $y_{n+1}\in S_n$ 存在。这样，定义出了点列 $\{y_n\}$。点列 $\{y_n\}$ 是 S 中的 Cauchy 列。事实上，如果(1)总是成立，则 $y_{n+1}=y_n,\forall\, n$。所以，点列 $\{y_n\}_1^\infty$ 是稳定的。因此不妨设(1)不发生。依(2)有

$$0<\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y_{n+1})\leqslant f(y_n)-f(y_{n+1})(n=1,2,\cdots)\qquad(1.2.5)$$

因此，有

$$\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y_m)\leqslant f(y_n)-f(y_m)\quad\forall\, n,m,n\leqslant m\qquad(1.2.6)$$

由不等式(1.2.5)可知，数列 $\{f(y_n)\}_1^\infty$ 是单调不增的，而且

$$f(y_n)\geqslant\inf_{x\in S_n}f(x)$$

由不等式(1.2.6)，得

$$\rho(y_n,y_m)\to 0\quad(n,m\to\infty)$$

即是点列 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列。距离空间 (S,ρ) 是完备的，存在点 $y^*\in S$，使得 $\rho(y_n,y^*)\to 0(n\to\infty)$。由假设 f 是下半连续的，因此

$$f(y^*)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}f(y_n)$$

现在取 $y_\varepsilon=y^*$，有

$$f(y_\varepsilon)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}f(y_n)\leqslant f(y_n)\leqslant f(x_\varepsilon)$$

这就证明了(1)。

由不等式(1.2.6)，得

$$\varepsilon^{1/2}\rho(x_\varepsilon,y_\varepsilon)=\varepsilon^{1/2}\lim_{n\to\infty}\rho(x_\varepsilon,y_n)$$
$$\leqslant\lim_{n\to\infty}(f(x_\varepsilon)-f(y_n))$$
$$\leqslant f(x_\varepsilon)-\inf_{x\in S}f(x)<\varepsilon$$

这就证明了(2)。

如果存在 $y'\neq y_\varepsilon$，使得

$$f(y')\leqslant f(y_\varepsilon)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_\varepsilon,y')$$

则在不等式(1.2.6)中，令 $m\to\infty$，得

$$\varepsilon^{1/2}\rho(y_\varepsilon,y_n)\leqslant f(y_n)-f(y_\varepsilon)$$

从上面的两个不等式，得

$$f(y')\leqslant f(y_n)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y_\varepsilon)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_\varepsilon,y')$$
$$\leqslant f(y_n)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y')\quad\forall\ n\qquad(1.2.7)$$

因此

$$y'\in\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n$$

由不等式(1.2.1)，有

$$2f(y_{n+1})-f(y_n)\leqslant\inf_{x\in S_n}f(x)\leqslant f(y')$$

在上面的不等式中，令 $n\to\infty$ 和用式(1.2.7)，得

$$f(y_\varepsilon)\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}f(y_n)\leqslant f(y')\leqslant f(y_n)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y'),\forall\ n$$

上面不等式的左端与 n 无关，右端令 $n\to\infty$，得

$$f(y_\varepsilon)\leqslant f(y')-\varepsilon^{1/2}\rho(y_\varepsilon,y')\leqslant f(y_\varepsilon)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_\varepsilon,y')$$
$$-\varepsilon^{1/2}\rho(y_\varepsilon,y')$$
$$=f(y_\varepsilon)-2\varepsilon^{1/2}\rho(y_\varepsilon,y')$$

因为 $y'\neq y_\varepsilon,\Rightarrow\rho(y_\varepsilon,y')>0$。这同上面的不等式矛盾。因此，有

$$f(y)\geqslant f(y_\varepsilon)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_\varepsilon,y)\quad\forall\ y\in S$$ 证毕

引理 1.2 设 R 是一维欧氏空间 R^1 中的一个勒贝格测度有穷的子集；$(R,B(R),\mu)$是勒贝格测度空间。$F\subset R^1$ 是一个紧集。E 是一个 Banach 空间，$f(\cdot,\cdot):F\times R\to E$。如果$\forall\ t\in F,f(t,\cdot)\in L^1(R,E)$和$\forall\ \tau\in F$

$$\int_R \| f(t,s) - f(\tau,s) \| \mathrm{d}\mu(s) \to 0 (t \to \tau) \qquad (1.2.8)$$

则，对每一子集 $A \in B(R)$，$\lambda \in (0,1)$ 和 $\varepsilon > 0$，存在可测子集 $e(\lambda) \subset A$，使得 $\mu(e(\lambda)) = \lambda\mu(A)$，并且

$$\lambda \int_A f(t,s)\mathrm{d}\mu(s) = \int_{e(\lambda)} f(t,s)\mathrm{d}\mu(s) + r_{\varepsilon,\lambda}(t) \quad \forall\, t \in F$$

(1.2.9)

$$\| r_{\varepsilon,\lambda}(t) \| < \varepsilon^2 \quad \forall\, t \in F, \lambda \in (0,1)$$

一致地成立。

证 如果 $f(t,s)$ 是集 A 的示性函数，$f(t,s) = \chi_A(s)$，勒贝格测度 μ 是非原子的，因此存在集 $e(\lambda) \subset A$，使得 $\mu(e(\lambda)) = \lambda\mu(A)$，并且式(1.2.9)成立。如果 $f(t,s)$ 是关于 s 的阶段函数，式(1.2.9)同样成立，因此，式(1.2.9)对 Bochner 可积函数 $f(t,s) \equiv f(s)$ 也成立。

从条件(1.2.8)，对上述的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，只要 $|t-\tau| < \delta(\varepsilon)$ 时

$$\| \int_e f(t,s)\mathrm{d}\mu(s) - \int_e f(\tau,s)\mathrm{d}\mu(s) \| < \varepsilon^2/3, \text{对 } e \in B(R)$$

一致成立。

集合 F 是紧集，设 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 是 F 的 $\delta(\varepsilon)$-网。令

$$\hat{f}(s) = (f(t_1,s), f(t_2,s), \cdots, f(t_m,s)) : R \to E \times \cdots \times E = E^m$$

依前面之证，存在集 $e(\lambda)$ 满足引理的要求和下式成立：

$$\| \lambda \int_A \hat{f}(s)\mathrm{d}\mu(s) - \int_{e(\lambda)} \hat{f}(s)\mathrm{d}\mu(s) \|_{E^m} < \varepsilon^2/3$$

因此，有

$$\| \lambda \int_A f(t_j,s)\mathrm{d}\mu(s) - \int_{e(\lambda)} f(t_j,s)\mathrm{d}\mu(s) \|_E < \varepsilon^2/3$$

$$(j = 1, \cdots, m)$$

令

$$r_{\varepsilon,\lambda}(t) = \lambda \int_A f(t,s)\mathrm{d}\mu(s) - \int_{e(\lambda)} f(t,s)\mathrm{d}\mu(s)$$

对每一 $t\in F$，存在 t_j 满足 $|t_j-t|<\delta(\varepsilon)$。所以

$$\|r_{t_0,\lambda}(t)\| \leqslant \lambda\left\|\int_A (f(t,s)-f(t_j,s))\mathrm{d}\mu(s)\right\| + \left\|\int_{e(\lambda)} (f(t_j,s)-f(t,s))\mathrm{d}\mu(s)\right\| + \left\|\lambda\int_A f(t_j,s)\mathrm{d}\mu(s) - \int_{e(\lambda)} f(t_j,s)\mathrm{d}\mu(s)\right\| < \varepsilon^2$$

对 $t\in F$ 和 $\lambda\in(0,1)$ 一致成立。 证毕

引理 1.3 设 (S,ρ) 是一个距离空间，$J(\cdot):S\to R^1$ 是连续函数，对固定元 $x^*\in S$，$\forall\ \varepsilon>0$，定义函数

$$J^\varepsilon(x)=\{(J(x)-J(x^*)+\varepsilon)^2+(J(x)-J(x^*))^2\}^{1/2}$$

则 $\forall\ x_\lambda,x_0\in S$，成立

$$J^\varepsilon(x_\lambda)-J^\varepsilon(x_0)=\frac{2}{I(x_\lambda)}(J(x_\lambda)-J(x_0)) \times(J(x_\lambda)+J(x_0)-2J(x^*)+\varepsilon) \tag{1.2.10}$$

如果

$$\rho(x_\lambda,x_0)\to 0\quad(\lambda\to 0)$$
$$J(x_\lambda)-J(x_0)=O(\lambda)\quad(\lambda\to 0)$$

则

$$J^\varepsilon(x_\lambda)-J^\varepsilon(x_0)=\frac{(J(x_0)-J(x^*)+\varepsilon)+(J(x_0)-J(x^*))}{\{(J(x_0)-J(x^*)+\varepsilon)^2+(J(x_0)-J(x^*))^2\}^{1/2}} \times(J(x_\lambda)-J(x_0))+o(\lambda) \tag{1.2.11}$$

式中 $o(\lambda)/\lambda\to 0\quad(\lambda\to 0)$

$O(\lambda)/\lambda$ 有界 $(\lambda\to 0)$

$$I(x_\lambda)=\{(J(x_\lambda)-J(x^*)+\varepsilon)^2+(J(x_\lambda)-J(x^*))^2\}^{1/2} +\{(J(x_0)-J(x^*)+\varepsilon)^2+(J(x_0)-J(x^*))^2\}^{1/2} \tag{1.2.12}$$

证 如果 $a\geqslant 0,b\geqslant 0,a+b>0$，用简单的关系 $a^{1/2}-b^{1/2}=(a-b)(a^{1/2}+b^{1/2})^{-1}$ 和 $I(x_\lambda)$ 的定义，有

$$J^\varepsilon(x_\lambda)-J^\varepsilon(x_0)=\{(J(x_\lambda)-J(x^*)+\varepsilon)^2+(J(x_\lambda)-J(x^*))^2\}^{1/2}$$

$$-\{(J(x_0)-J(x^*)+\varepsilon)^2+(J(x_0)-J(x^*))^2\}^{1/2}$$

$$=\frac{1}{I(x_\lambda)}\{(J(x_\lambda)-J(x^*)+\varepsilon)^2+(J(x_\lambda)-J(x^*))^2\}$$

$$-\frac{1}{I(x_\lambda)}\{(J(x_0)-J(x^*)+\varepsilon)^2+(J(x_0)-J(x^*))^2\}$$

$$=\frac{2}{I(x_\lambda)}(J(x_\lambda)-J(x_0))(J(x_\lambda)+J(x_0)-2J(x^*)+\varepsilon)$$

这就证明了式(1.2.10)。

如果 $\rho(x_\lambda,x_0)\to 0$，$J(x_\lambda)-J(x_0)=O(\lambda)\quad(\lambda\to 0)$，由假设 $J(x)$ 连续，$J(x_\lambda)\to J(x_0)(\lambda\to 0)$。于是有

$$I(x_\lambda)\to 2\{(J(x_0)-J(x^*)+\varepsilon)^2+(J(x_0)-J(x^*))^2\}^{1/2}\quad(\lambda\to 0)$$

因此，从式(1.2.10)可得式(1.2.11)。　　　　证毕

§1.3　最优控制的最大值原理

本节我们将要证明对于控制问题(1.1.1)—(1.1.2)—(1.1.3)的最优控制满足的必要条件——最大值原理。

本节假定：

(A_1)　$f(\cdot,\cdot,\cdot):R^1\times R^n\times R^r\to R^n$ 连续，$f(t,x,u)$ 关于 x 的偏导数 $f_x(t,x,u)$ 关于 (x,u) 连续和有界，$|f_x(x,u)|\leqslant\bar{f}$，$\bar{f}$ 是正常数。

(A_2)　$f^0(\cdot,\cdot,\cdot):R^1\times R^n\times R^r\to R$ 连续，$f^0(t,x,u)$ 关于 x 的偏导数 $f_x^0(t,x,u)$ 关于 (x,u) 连续。

(A_3)　$h(\cdot):R^n\to R^1$ 连续可微。

现在，考虑如下的变分方程：任意的 $u^*(\cdot),v(\cdot)\in U_{ad}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(t)=f_x(t,x^*(t),u^*(t))z(t)$$
$$+(f(t,x^*(t),v(t))-f(t,x^*(t),u^*(t)))\quad(1.3.1)$$
$$z(0)=0$$

式中，$x^*(t),t\in[0,T]$是相应于容许控制 $u^*(t)$的轨道，记 $z(t)=$

$z(t,v)$，$t\in[0,T]$为变分方程(1.3.1)的解。用$\dot{z}(t)$表示$z(t)$的导数。

定理 1.1 对于任意的容许控制$u^*(\cdot)$，$v(\cdot)\in U_{ad}$，$z(t,v)$是变分方程(1.3.1)的解，则$\forall\ \varepsilon\in(0,1)$，存在$u^\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}$，使得相应于$u^\varepsilon(\cdot)$，$u^*(\cdot)$的状态方程(1.1.1)—(1.1.2)的解，分别是$x^\varepsilon(t)$，$x^*(t)$，$t\in[0,T]$，成立关系式

$$x^\varepsilon(t)=x^*(t)+\varepsilon z(t,v)+\varepsilon r_\varepsilon(t),t\in[0,T]$$
$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|r_\varepsilon(t)|^2\rightarrow 0\quad(\varepsilon\rightarrow 0)$$

证 用引理 1.2，存在可测子集$e_\varepsilon\subset[0,T]$，使得$e_\varepsilon$的勒贝格测度 mes $e_\varepsilon=\varepsilon T$，并且

$$\begin{aligned}&\varepsilon\int_0^t\{f(s,x^*(s),v(s))-f(s,x^*(s),u^*(s))\}\mathrm{d}s\\&=\int_{e_\varepsilon\cap[0,t]}\{f(s,x^*(s),v(s))-f(s,x^*(s),u^*(s))\}\mathrm{d}s\\&+a_\varepsilon(t)\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

式中

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(t)|\rightarrow 0\quad(\varepsilon\rightarrow 0)$$

令

$$u^\varepsilon(t)=\begin{cases}v(t),当\ t\in e_\varepsilon\\u^*(t),当\ t\notin e_\varepsilon\end{cases}$$
$$r_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}(x^\varepsilon(t)-x^*(t))-z(t,v)$$

对函数$r_\varepsilon(t)$求导数，将方程(1.1.1)和(1.3.1)的解代入，得

$$\begin{aligned}\dot{r}_\varepsilon(t)&=\varepsilon^{-1}(\dot{x}^\varepsilon(t)-\dot{x}^*(t))-\dot{z}(t,v)\\&=\varepsilon^{-1}\{f(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))-f(t,x^*(t),u^*(t))\}\\&\quad-f_x(t,x^*(t),u^*(t))z(t,v)\\&\quad-\{f(t,x^*(t),v(t))-f(t,x^*(t),u^*(t))\}\\&=\varepsilon^{-1}\{f(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))-f(t,x^*(t),u^\varepsilon(t))\}\\&\quad+\varepsilon^{-1}\{f(t,x^*(t),u^\varepsilon(t))-f(t,x^*(t),u^*(t))\}\\&\quad-f_x(t,x^*(t),u^*(t))z(t,v)\end{aligned}$$

$$- \{f(t,x^*(t),v(t)) - f(t,x^*(t),u^*(t))\}$$

$$= \int_0^1 \{f_x(t,\lambda\varepsilon(z(t)+r_\varepsilon(t)),u^\varepsilon(t)) - f_x(t,x^*(t),u^*(t))\} z(t,v) \mathrm{d}\lambda$$

$$+ \int_0^1 f_x(t,\lambda\varepsilon(z(t)+r_\varepsilon(t)),u^\varepsilon(t)) \mathrm{d}\lambda r_\varepsilon(t)$$

$$+ \varepsilon^{-1}\{f(t,x^*(t),u^\varepsilon(t)) - f(t,x^*(t),u^*(t))\}$$

$$- \{f(t,x^*(t),v(t)) - f(t,x^*(t),u^*(t))\}$$

上式两端从 0 到 t 积分，用初始条件 $r_\varepsilon(0)=0$ 和式(1.3.2)，得

$$r_\varepsilon(t) = \int_0^t\int_0^1 \{f_x(s,\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s)),u^\varepsilon(s))$$

$$- f_x(s,x^*(s),u^*(s))\} z(s,v) \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}s$$

$$+ \int_0^t\int_0^1 f_x(s,\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s)),u^\varepsilon(s)) \mathrm{d}\lambda r_\varepsilon(s) \mathrm{d}s$$

$$+ \varepsilon^{-1}\int_0^t \{f(s,x^*(s),u^\varepsilon(s)) - f(s,x^*(s),u^*(s))\} \mathrm{d}s$$

$$- \int_0^t \{f(s,x^*(s),v(s)) - f(s,x^*(s),u^*(s))\} \mathrm{d}s$$

$$= \int_0^t\int_0^1 \{f_x(s,\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s)),u^\varepsilon(s))$$

$$- f_x(s,x^*(s),u^*(s))\} z(s,v) \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}s$$

$$+ \int_0^t\int_0^1 f_x(s,\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s)),u^\varepsilon(s)) \mathrm{d}\lambda r_\varepsilon(s) \mathrm{d}s$$

$$- \varepsilon^{-1} a_\varepsilon(t) \tag{1.3.3}$$

用假设(A_1)，f_x 有界，因此存在正常 c_1，c_2 和 c_3，由式(1.3.3)，得

$$|r_\varepsilon(t)|^2 \leqslant c_1\int_0^t |r_\varepsilon(s)|^2 \mathrm{d}s + c_2|\varepsilon^{-1} a_\varepsilon(t)|^2$$

$$+ c_3\int_0^t \left|\int_0^1 \{f_x(s,\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s)),u^\varepsilon(s))\right.$$

$$\left. - f_x(s,x^*(s),u^*(s))\} \mathrm{d}\lambda\right|^2 |z(s,v)|^2 \mathrm{d}s$$

用 Gronwall's 不等式，存在正常数 c_4 和 c_5，使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |r_\varepsilon(t)|^2 \leqslant c_5 \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\varepsilon^{-1} a_\varepsilon(t)|^2$$

$$+ c_4\int_{e_\lambda}\left|\int_0^1\{f_x(s,\lambda x(z(s)+r_\varepsilon(s)),v(s))\right.$$

$$\left.-f_x(s,x^*(s),u^*(s))\}\mathrm{d}\lambda\right|^2|z(s,v)|^2\mathrm{d}s\to 0.(\varepsilon\to 0)$$ 证毕

定理 1.2 在假定(A_1),(A_2)和(A_3)之下,设U是闭集,$u^*(\cdot)\in U_{ad}$是控制问题(1.1.1)—(1.1.2)—(1.1.3)的最优控制,任一$v(\cdot)\in U_{ad}$,$z(t,v)$是变分方程(1.3.1)的解,则

$$\int_0^T f_x^0(s,x^*(s),u^*(s))z(s,v)\mathrm{d}s+h_x(x^*(T))z(T,v)$$

$$+\int_0^T\{f^0(s,x^*(s),v(s))-f^0(s,x^*(s),u^*(s))\}\mathrm{d}s\geqslant 0 \tag{1.3.4}$$

证 令$S=U_{ad}$,$\forall\, u(\cdot),v(\cdot)\in S$,定义

$$\rho(u(\cdot),v(\cdot))=\int_0^T\frac{|u(t)-v(t)|}{1+|u(t)-v(t)|}\mathrm{d}t$$

则$\rho(\cdot,\cdot)$是S上的距离,(S,ρ)是完备的距离空间,依距离ρ的收敛等价于依测度$\mathrm{d}t$收敛。

考虑在距离空间(S,ρ)上定义的函数:

$$J^\varepsilon(v(\cdot))=\{(J(v(\cdot))-J(u^*(\cdot))+\varepsilon)^2+(J(v(\cdot))$$

$$-J(u^*(\cdot)))^2\}^{1/2}$$

其中,函数$J(v(\cdot))$用式(1.1.3)定义,$u^*(\cdot)$是最优控制。

显然
$$0<\inf_{v(\cdot)\in S}J^\varepsilon(v(\cdot))\leqslant J^\varepsilon(u^*(\cdot))$$

$$J^\varepsilon(u^*(\cdot))<\inf_{v(\cdot)\in S}J^\varepsilon(v(\cdot))+\varepsilon$$

用引理 1.1,存在$u^\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}$,使得

$$J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot))\leqslant J^\varepsilon(u^*(\cdot))=\varepsilon$$

$$J^\varepsilon(v(\cdot))\geqslant J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot))-\varepsilon^{1/2}\rho(u^\varepsilon(\cdot),v(\cdot)),\forall\, v(\cdot)\in U_{ad} \tag{1.3.5}$$

$$\rho(u^\varepsilon(\cdot),u^*(\cdot))\leqslant\varepsilon^{1/2} \tag{1.3.6}$$

对于任一$v(\cdot)\in U_{ad}$,$\forall\,\lambda\in(0,1)$,依引理 1.2 和定理 1.1,存在可测子集$e_\lambda\subset[0,T]$和$u_\lambda^\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}$,使得

$$u_\lambda^\varepsilon(t)=\begin{cases}v(t), & 当\ t\in e_\lambda\\ u^\varepsilon(t), & 当\ t\notin e_\lambda\end{cases}$$

$$\text{mes}\ e_\lambda=\lambda T \tag{1.3.7}$$

$$x_\lambda^\varepsilon(t)=x^\varepsilon(t)+\lambda z^\varepsilon(t,v)+\lambda r_\lambda^\varepsilon(t) \tag{1.3.8}$$

$$\lambda\int_0^T\{f^0(t,x^\varepsilon(t),v(t))-f^0(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{e_\lambda}\{f^0(t,x^\varepsilon(t),v(t))-f^0(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))\}\mathrm{d}t+o(\lambda) \tag{1.3.9}$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|r_\lambda^\varepsilon(t)|^2\to 0\quad(\lambda\to 0)$$

其中，$o(\lambda)/\lambda\to 0$，$(\lambda\to 0)$，$x_\lambda^\varepsilon(t)$，$x^\varepsilon(t)$，$t\in[0,T]$分别是相应于$u_\lambda^\varepsilon(t)$、$u^\varepsilon(t)$的轨道，$z^\varepsilon(t)=z^\varepsilon(t,v)$是变分方程

$$\frac{\mathrm{d}z^\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}=f_x(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))z^\varepsilon(t)$$

$$+(f(t,x^\varepsilon(t),v(t))-f(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))) \tag{1.3.10}$$

$$z^\varepsilon(0)=0$$

的解。

下面计算泛函$J(v(\cdot))$在$u_\lambda^\varepsilon(\cdot)$与$u^\varepsilon(\cdot)$的值之差：

$$J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot))-J(u^\varepsilon(\cdot))=\int_0^T\{f^0(t,x_\lambda^\varepsilon(t),u_\lambda^\varepsilon(t))$$

$$-f^0(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))\}\mathrm{d}t$$

$$+\{h(x_\lambda^\varepsilon(T))-h(x^\varepsilon(T))\}$$

$$=\int_0^T\{f^0(t,x^\varepsilon(t)+\lambda z^\varepsilon(t)+\lambda r_\lambda^\varepsilon(t),u_\lambda^\varepsilon(t))$$

$$-f^0(t,x^\varepsilon(t),u_\lambda^\varepsilon(t))\}\mathrm{d}t$$

$$+\int_0^T\{f^0(t,x^\varepsilon(t),u_\lambda^\varepsilon(t))-f^0(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))\}\mathrm{d}t$$

$$+\{h(x^\varepsilon(T)+\lambda z^\varepsilon(T,v)+\lambda r_\lambda^\varepsilon(T))-h(x^\varepsilon(T))\}$$

$$=\lambda\int_0^T f_x^0(t,x^\varepsilon(t),u_\lambda^\varepsilon(t))z^\varepsilon(t,v)\mathrm{d}t$$

$$+\lambda\int_0^T\{f^0(t,x^\varepsilon(t),v(t))-f^0(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))\}\mathrm{d}t$$

$$+ \lambda h_x(x^\varepsilon(T))z^\varepsilon(T,v) + o(\lambda) \qquad (1.3.11)$$

依距离 $\rho(\cdot,\cdot)$和 $u_\lambda^\varepsilon(\cdot)$的定义,得

$$\rho(u_\lambda^\varepsilon(\cdot),u^\varepsilon(\cdot)) = \int_0^T \frac{|u_\lambda^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(t)|}{1 + |u_\lambda^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(t)|}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{e_\lambda} \frac{|v(t) - u^\varepsilon(t)|}{1 + |v(t) - u^\varepsilon(t)|}\mathrm{d}t \leqslant \int_{e_\lambda}\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{mes}\ e_\lambda = \lambda T \qquad (1.3.12)$$

用引理 1.3 和式(1.3.11),得

$$J^\varepsilon(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot)) = \frac{(2J(u^\varepsilon(\cdot)) - 2J(u^*(\cdot)) + \varepsilon)}{J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot))}$$

$$\times (J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J(u^\varepsilon(\cdot))) + o(\lambda)$$

$$= \lambda\beta(\varepsilon)\{\int_0^T f_x^0(t,x^\varepsilon(t),u_\lambda^\varepsilon(t))z^\varepsilon(t,v)\mathrm{d}t$$

$$+ h_x(x^\varepsilon(T))z^\varepsilon(T,v) + \int_0^T \{f^0(t,x^\varepsilon(t),v(t))$$

$$- f^0(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))\}\mathrm{d}t\} + o(\lambda) \qquad (1.3.13)$$

式中

$$\beta(\varepsilon) = \frac{(J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon) + (J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)))}{J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot))}$$

(1.3.14)

在式(1.3.5)中,用 $u_\lambda^\varepsilon(\cdot)$代替 $v(\cdot)$,用式(1.3.13)和(1.3.12),得

$$\lambda\beta(\varepsilon)\{\int_0^T f_x^0(t,x^\varepsilon(t),u_\lambda^\varepsilon(t))z^\varepsilon(t,v)\mathrm{d}t + h_x(x^\varepsilon(T))z^\varepsilon(T,v)$$

$$+ \int_0^T (f^0(t,x^\varepsilon(t),v(t)) - f^0(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t)))\mathrm{d}t\} + o(\lambda)$$

$$\geqslant - \varepsilon^{1/2}\rho(u_\lambda^\varepsilon(\cdot),u^\varepsilon(\cdot)) \geqslant - \lambda\varepsilon^{1/2}T \qquad (1.3.15)$$

用简单的关系式:如果 $a\geqslant 0, b\geqslant 0, a+b>0$,则 $1\leqslant (a+b)^2(a^2+b^2)^{-1}\leqslant 2$。取 $a=(J(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot)))$, $b=(J(u^*(\cdot))-J(u^*(\cdot))+\varepsilon)$,由假设 $u^*(\cdot)$是最优控制,因此 $a\geqslant 0, b>0$。用 $\beta(\varepsilon)$的定义(1.3.14),有 $\beta(\varepsilon)\geqslant 1, \forall\ \varepsilon\in(0,1)$和 $1\leqslant\beta^2(\varepsilon)\leqslant 2, \forall\ \varepsilon\in(0,1)$。于是数集$\{\beta(\varepsilon)\}$是有界的。因此,可以从数集$\{\beta(\varepsilon)\}$中选出

收敛子列 $\beta(\varepsilon_i)\to\beta_0(\varepsilon_i\to 0, i\to\infty)$，并且 $1\leqslant\beta_0\leqslant 2$。

在式(1.3.15)中，用 $\lambda>0$ 除两端后，令 $\lambda\to 0$ 和注意到式(1.3.12)，以及关于 f^0 的假定(A_2)，得

$$\beta(\varepsilon)\{\int_0^T f_x^0(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))z^\varepsilon(t)\mathrm{d}t + h_x(x^\varepsilon(T))z^\varepsilon(T)$$

$$+\int_0^T (f^0(t,x^\varepsilon(t),v(t)) - f^0(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t)))\mathrm{d}t\}$$

$$\geqslant -\varepsilon^{1/2}T \tag{1.3.16}$$

由式(1.3.6)，有

$$\rho(u^\varepsilon(\cdot),u^*(\cdot))\to 0\quad(\varepsilon\to 0)$$

这等价于 $u^\varepsilon(t)$ 依测度 $\mathrm{d}t$ 收敛于 $u^*(t)$。因此，存在子列 $u^{\varepsilon_i}(t)\to u^*(t)(\varepsilon_i\to 0, i\to\infty)$，$a.e.\ t$，则下式成立

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x^{\varepsilon_i}(t)-x^*(t)|\to 0\quad(i\to\infty)$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|z^{\varepsilon_i}(t)-z(t,v)|\to 0\quad(i\to\infty)$$

将式(1.3.16)和式(1.3.6)中的 ε 用 ε_i 代替，然后在式(1.3.6)中，令 $i\to\infty$，用上面两式和假定(A_1)，(A_2)和(A_3)，由式(1.3.16)，得

$$\beta_0\{\int_0^T f_x^0(t,x^*(t),u^*(t))z(t,v)\mathrm{d}t + h_x(x^*(T))z(T,v)$$

$$+\int_0^T (f^0(t,x^*(t),v(t)) - f^0(t,x^*(t),u^*(t)))\mathrm{d}t\}\geqslant 0$$

因为 $\beta_0\geqslant 1$，从上面的不等式得式(1.3.4)。　　证毕

定理 1.3　在定理 1.2 的条件下，设 $u^*(\cdot)\in U_{ad}$是控制问题(1.1.1)—(1.1.2)—(1.1.3)的最优控制，$x^*(t)$，$t\in[0,T]$是相应于 $u^*(t)$的最优轨道，则存在区间$[0,T]$上绝对连续的 n 维向量值函数 $\psi^*(t)$，$t\in[0,T]$，使得函数组$(x^*(t),\psi^*(t),u^*(t))$满足：

(1)微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x^*(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H(t,x^*(t),\psi^*(t),u^*(t))}{\partial\psi}=f(t,x^*(t),u^*(t))$$

$$\tag{1.3.17}$$

$$x^*(0)=x_0$$

$$\frac{d\psi^*(t)}{dt} = -\frac{\partial H(t,x^*(t),\psi^*(t),u^*(t))}{\partial x}$$

$$= f_x^0(t,x^*(t),u^*(t)) - \psi^*(t) \cdot f_x(t,x^*(t),u^*(t))$$

(1.3.18)

$$\psi^*(T) = -h_x(x^*(T))$$

(2)最大值原理

$$\max_{u \in U} H(t,x^*(t),\psi^*(t),u) = H(t,x^*(t),\psi^*(t),u^*(t)),$$

$$a.e. t \in [0,T] \qquad (1.3.19)$$

其中 $H(t,x,\psi,u) = -f^0(t,x,u) + \psi \cdot f(t,x,u)$

是具有性能指标(1.1.3)的系统(1.1.1)的 Hamiltonian 函数,"·"表示两个向量的欧几里得内积。

证 对任意的 $v(\cdot) \in U_{ad}$,让 $z(t,v)$,$t \in [0,T]$是变分方程(1.3.1)的解,依定理(1.2),成立不等式

$$\int_0^T f_x^0(s,x^*(s),u^*(s))z(s,v)ds + h_x(x^*(T))z(T,v)$$

$$+ \int_0^T (f^0(s,x^*(s),v(s)) - f^0(s,x^*(s),u^*(s)))ds \geqslant 0$$

(1.3.20)

对$\forall$ $\phi(\cdot) \in L^2((0,T),R^n)$,考虑微分方程组

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = f_x(t,x^*(t),u^*(t))\rho(t) + \phi(t) \qquad (1.3.21)$$

$$\rho(0) = 0$$

的解 $\rho(t)$,$t \in [0,T]$。

用 $\Phi(t)$表示微分方程组(1.3.21)的齐次方程($\phi(t) \equiv 0$)的基本解矩阵,$\Psi(t)$表示 $\Phi(t)$的逆矩阵,则

$$\Phi(t)\Psi(t) = I(\text{单位矩阵})$$

$$\dot{\Psi}(t) = -\Psi(t)f_x(t,x^*(t),u^*(t)) \qquad (1.3.22)$$

则方程(1.3.21)的解 $\rho(t)$可表示为

$$\rho(t) = \Phi(t)\int_0^t \Psi(\tau)\phi(\tau)d\tau \qquad (1.3.23)$$

在 Hilbert 空间 $L^2((0,T),R^n)$上定义泛函

$$L(\phi) = \int_0^T f_x^0(s, x^*(s), u^*(s))\rho(s)\mathrm{d}s + h_x(x^*(T))\rho(T)$$

其中 $\rho(t)$ 是微分方程组(1.3.21)的解(1.3.23)式。

$L(\phi)$ 是空间 $L^2((0,T),R^n)$ 上的线性连续泛函，依 Rieze's 表现定理，存在唯一 $\hat{\psi}(\cdot) \in L^2((0,T),R^n)$，使得

$$\int_0^T f_x^0(s, x^*(s), u^*(s))\rho(s)\mathrm{d}s + h_x(x^*(T))\rho(T)$$
$$= \int_0^T \langle \hat{\psi}(s), \phi(s)\rangle_{R^n}\mathrm{d}s \quad \forall\ \phi(\cdot) \in L^2((0,T),R^n) \tag{1.3.24}$$

其中 $\langle \cdot , \cdot \rangle$ 表示 Hilbert 空间 $L^2((0,T),R^n)$ 中的内积。

在方程(1.3.21)中，取 $\phi(t) = f(t, x^*(t), v(t)) - f(t, x^*(t), u^*(t))$。此时，方程(1.3.21)的解就是变分方程(1.3.1)的解，$\rho(t) = z(t,v)$，将这样取的 $\phi(t)$ 和 $z(t,v)$ 代入式(1.3.24)，得

$$\int_0^T f_x^0(s, x^*(s), u^*(s))z(s,v)\mathrm{d}s + h_x(x^*(T))z(T,v)$$
$$= \int_0^T \langle \hat{\psi}(s), f(s, x^*(s), v(s)) - f(s, x^*(s), u^*(s))\rangle_{R^n}\mathrm{d}s \tag{1.3.25}$$

将式(1.3.25)代入式(1.3.20)，得

$$0 \leqslant \int_0^T (f^0(s, x^*(s), v(s)) - f^0(s, x^*(s), u^*(s)))\mathrm{d}s$$
$$+ \int_0^T \langle \hat{\psi}(s), f(s, x^*(s), v(s)) - f(s, x^*(s), u^*(s))\rangle_{R^n}\mathrm{d}s$$
$$\forall\ v(\cdot) \in U_{ad} \tag{1.3.26}$$

将式(1.3.23)的 $\rho(t)$ 代入式(1.3.24)的左端第一项，用积分交换次序，得

$$\int_0^T f_x^0(s, x^*(s), u^*(s))\rho(s)\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^T f_x^0(s, x^*(s), u^*(s))\Phi(s)\int_0^s \Psi(\tau)\phi(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^T \left(\int_\tau^T f_x^0(s, x^*(s), u^*(s))\Phi(s)\mathrm{d}s\right)\Psi(\tau)\phi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.3.27}$$

将 $\rho(T)$代入式(1.3.24)的左端第二项，得

$$h_x(x^*(T))\rho(T)=\int_0^T h_x(x^*(T))\Phi(T)\Psi(\tau)\phi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.3.28}$$

将式(1.3.27)与式(1.3.28)代入式(1.3.24)，得

$$\int_0^T\langle\hat{\psi}(s),\phi(s)\rangle_{R^n}\mathrm{d}s=\int_0^T\{\int_\tau^T f_x^0(s,x^*(s),u^*(s))\Phi(s)\mathrm{d}s\Psi(\tau)$$
$$+h_x(x^*(T))\Phi(T)\Psi(\tau)\}\phi(\tau)\mathrm{d}\tau,\forall\ \phi(\cdot)\in L^2((0,T),R^n) \tag{1.3.29}$$

因为式(1.3.29)对一切 $\phi(\cdot)\in L^2((0,T),R^n)$成立，所以有

$$\hat{\psi}(s)=\{\int_s^T f_x^0(\tau,x^*(\tau),u^*(\tau))\Phi(\tau)\mathrm{d}\tau+h_x(x^*(T))\Phi(T)\}\Psi(s) \tag{1.3.30}$$

对式(1.3.30)两端求导数，用式(1.3.22)，得

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\psi}}(s)&=\{\int_s^T f_x^0(\tau,x^*(\tau),u^*(\tau))\Phi(\tau)\mathrm{d}\tau\\&\quad+h_x(x^*(T))\Phi(T)\}\dot{\Psi}(s)-f_x^0(s,x^*(s),u^*(s))\\&=-\hat{\psi}(s)f_x(s,x^*(s),u^*(s))-f_x^0(s,x^*(s),u^*(s))\end{aligned} \tag{1.3.31}$$

从式(1.3.30)得到 $\hat{\psi}(t)$满足的终端条件为

$$\hat{\psi}(T)=h_x(x^*(T)) \tag{1.3.32}$$

令 $\psi^*(t)=-\hat{\psi}(t)$

从 $\hat{\psi}(t)$满足的微分方程组(1.3.31)和终端条件(1.3.32)，得到 $\psi^*(t)$应该满足微分方程组(1.3.18)以及终端条件。

在式(1.3.26)中，用 $\hat{\psi}(s)=-\psi^*(s)$代入，得

$$\int_0^T(f^0(s,x^*(s),v(s))-f^0(s,x^*(s),u^*(s)))\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^T\langle\psi^*(s),f(s,x^*(s),u^*(s))-f(s,x^*(s),v(s))\rangle_{R^n}\mathrm{d}s\geqslant 0$$
$$\forall\ v(\cdot)\in U_{ad}$$

用 Hamiltonian 函数 $H(t,x,\psi,u)$来表达上式，得

$$\int_0^T H(s,x^*(s),\psi^*(s),v(s))\mathrm{d}s \leqslant \int_0^T H(s,x^*(s),\psi^*(s),u^*(s))\mathrm{d}s$$

$\forall\ v(\cdot) \in U_{ad}$ (1.3.33)

对任一 $u\in U$，令

$$\lambda(t) = H(t,x^*(t),\psi^*(t),u^*(t)) - H(t,x^*(t),\psi^*(t),u)$$

$$e = \{t|t \in [0,T],\lambda(t) < 0\}$$

如果集合 e 的勒贝格测度 mes $e>0$，取

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} u, & \text{当 } t \in e \\ u^*(t), & \text{当 } t \notin e \end{cases}$$

则 $\bar{v}(\cdot)\in U_{ad}$。将 $\bar{v}(\cdot)$代入式(1.3.33)，得

$$\int_e \lambda(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$$

另一方面，依集合 e 的定义，得

$$\int_e \lambda(t)\mathrm{d}t < 0$$

这是一矛盾。因此必须 mes $e=0$。即是 $\lambda(t)\geqslant 0$，$a.e.\ t\in[0,T]$。这就得到

$$\max_{u\in U} H(t,x^*(t),\psi^*(t),u) = H(t,x^*(t),\psi^*(t),u^*(t)),$$

$a.e.\ t \in [0,T]$ 证毕

§1.4 最大值原理对线性系统的应用

本书将应用§1.3得到的最大值原理到具有二次性能指标的线性系统的最优控制问题，得到一些很重要的具体结果。应用最大值原理到具有二次性能指标的线性系统的最优控制问题，通过解矩阵 Riccati 微分方程，就可以求得控制依赖于状态的反馈控制律和最优控制。

假定受控系统的运动规律用线性常微分方程组来描述

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \qquad (1.4.1)$$

$$x(0) = x_0$$

其中，$A(t)$，$t\in[0,T]$是变系数的 $n\times n$ 矩阵；$B(t)$是 $n\times r$ 矩阵；$x\in$

R^n；$u\in U\subset R^r$，U 是 r 维欧氏空间 R^r 中的集合；初值 $x_0\in R^n$，$A(t)$和$B(t)$关于 t 连续。

系统(1.4.1)的性能指标为

$$J(u(\cdot)) = h(x(T)) \tag{1.4.2}$$

式中，$x(T)$是系统(1.4.1)的解 $x(t)$，$t\in[0,T]$在终端时刻 T 的值，$h(\cdot)$：$R^n\to R^1$ 满足 §1.3 中的条件(A_3)。

控制问题(1.4.1)—(1.4.2)的 Hamiltonian 函数为

$$H(t,x,\psi,u) = \psi A(t)x + \psi B(t)u$$

式中的 $\psi\in R^n$ 是协态，协态过程满足常微分方程组和终端条件：

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t)A(t) \tag{1.4.3}$$

$$\psi(T) = -h_x(x(T)) \tag{1.4.4}$$

用 $\Phi(t,s)$表示常微分方程组

$$\dot{x} = A(t)x$$

$$x(s) = x_0$$

的基本解矩阵，$\Phi(s,s)=I$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Phi(t,s) = -\Phi(t,s)A(s)$$

并且 $\Phi(t,s)=\Phi^{-1}(s,t)$表示 $\Phi(s,t)$的逆矩阵。

方程(1.4.3)—(1.4.4)的解可以表示为

$$\psi(t) = -h_x(x(T))\Phi(T,t)$$

设 $u(t)$，$t\in[0,T]$是控制问题(1.4.1)—(1.4.2)的最优控制，$x(t)$，$t\in[0,T]$是相应于 $u(t)$的最优轨道。依定理 1.3 的最大值原理

$$\begin{aligned} H(t,x(t),\psi(t),u(t)) &= \max_{u\in U}(\psi(t)A(t)x(t) + \psi(t)B(t)u) \\ &= \psi(t)A(x)x(t) + \max_{u\in U}\psi(t)B(t)u \end{aligned}$$

其中 $\psi(t) = -h_x(x(T))\Phi(T,t)$

约定

$$\varphi(t) = \psi(t)B(t) = (\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))$$

则

$$\max_{u\in U}\varphi(t)B(t)u = \max_{u\in U}\sum_{i=1}^{r}\varphi_i(t)u_i$$

当U是R^r中的开集时，线性函数$\varphi(t)u$在U中无最大值。为了使得最大值$\max\limits_{u\in U}\varphi(t)u$存在，必须假定$U$是$R^r$中的有界闭域。在这种情形，关于$u$的线性函数$\varphi(t)u$在有界闭域$U$的边界上达到最大值。下面讨论关于$U$的两种特殊情形。

情形1 当

$U=\{u|u=(u_1,\cdots,u_r),|u_i|\leqslant c_i(i=1,2,\cdots,r)\}$，$c_i$是常数。

在这种情形，最大值

$$\max_{u\in U}\varphi(t)u = \sum_{i=1}^{r}\max_{|u_i|\leqslant c_i}\varphi_i(t)u_i$$

$$= \sum_{i=1}^{r}c_i|\varphi_i(t)|$$

因此，最优控制

$$u_i(t) = c_i\operatorname{sign}\varphi_i(t) \quad (i=1,2,\cdots,r) \tag{1.4.5}$$

这里符号函数

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x>0 \\ 0, & \text{当 } x=0 \\ -1 & \text{当 } x<0 \end{cases}$$

记$b_i(t)$是矩阵$B(t)$的第i个列$(i=1,2,\cdots,r)$。把$\varphi_i(t)$的表达式代入式(1.4.5)，得

$$u_i(t) = c_i\operatorname{sign}\varphi_i(t) = -c_i\operatorname{sign}(h_x(x(T))\Phi(T,t)b_i(t))$$

$$(i=1,2,\cdots,r) \tag{1.4.6}$$

最优控制$u(t)$的表达式(1.4.6)用一个符号函数来表示出来，说明了$u_i(t)(i=1,2,\cdots,r)$只取两个值c_i或$-c_i$，这种控制称为开关控制。

情形2 当

$$U = \{u\,\big|\,|u|\leqslant c\}$$

这里c是正常数，$|\cdot|$表示R^r中的欧几里得范数。

在这种情形，最大值

$$\max_{u\in U}\varphi(t)u = c|\varphi(t)|$$

和最优控制

$$u^*(t) = c\varphi(t)/|\varphi(t)|$$
$$= -ch_x(x(T))\Phi(T,t)B(t)/|h_x(x(T))\Phi(T,t)B(t)| \tag{1.4.7}$$

当 $h(x)=hx$ 是 x 的线性函数时，$h=(h_1,\cdots,h_n)$，$h_x=h$。在这时，情形 1 的式(1.4.6)和情形 2 的式(1.4.7)有更简单的形式

$$u_i(t) = -c_i\mathrm{sign}(h\Phi(T,t)b_i(t))(i=1,2,\cdots,r)$$
$$u^*(t) = -ch\Phi(T,t)B(t)/|h\Phi(T,t)B(t)|$$

这两个简单的表达式说明，当 $h(x)$是 x 的线性函数时，线性系统的最优控制由已知量完全确定。

当 $h(x)$不是 x 的线性函数时，最优控制 $u(t)$还依赖于 $x(T)$，记为 $u(t,x(T))$。把 $u(t,x(T))$代入方程(1.4.1)的解，得

$$x(T) = \Phi(T,0)x_0 + \int_0^T \Phi(T,s)B(s)u(s,x(T))\mathrm{d}s$$

这是一个关于 $x(T)$的积分方程，求解这一方程得到 $x(T)$，然后把 $x(T)$代入 $u(t,x(T))$，得到最优控制完全由已知量确定。

现在来讨论线性系统(1.4.1)具有下面的二次性能指标的最优控制问题。

$$J(u(\cdot)) = x(T)P_1x(T) + \int_0^T(x(t)Q(t)x(t) + u(t)R(t)u(t))\mathrm{d}t \tag{1.4.8}$$

式中，P_1 和 $Q(t)$、$\forall\, t\in[0,T]$是 $n\times n$ 非负定对称阵，$R(t)$，$t\in[0,T]$是 $r\times r$ 正定对称阵。

依定理 1.3，控制问题(1.4.1)—(1.4.8)的 Hamiltonian 函数为

$$H(t,x,\psi,u) = -xQ(t)x - uR(t)u + \psi A(t)x + \psi B(t)u$$

协态过程满足下面的微分方程组和终端条件：

$$\dot\psi(t) = -\psi(t)A(t) + 2x^\tau(t)Q(t) \tag{1.4.9}$$

$$\psi(T) = -2x^\tau(T)P_1 \tag{1.4.10}$$

符号“τ”表示转置运算。

假定 $U=R^r$，$u(t)$，$t\in[0,T]$是控制问题(1.4.1)—(1.4.8)的最优控制，$x(t)$，$t\in[0,T]$为相应于 $u(t)$的最优轨道。$\psi(t)$是相应于 $x(t)$的方程(1.4.9)—(1.4.10)的解。依定理 1.3 的最大值原理，有

$$\begin{aligned} H(t,x(t),\psi(t),u(t)) &= \max_{u\in U}(-x(t)Q(t)x(t)+\psi(t)A(t)x(t) \\ &\quad +\psi(t)B(t)u-uR(t)u) \\ &= -x(t)Q(t)x(t)+\psi(t)A(t)x(t) \\ &\quad +\max_{u\in R^r}(\psi(t)B(t)u-uR(t)u) \end{aligned}$$

函数 $\psi(t)B(t)u-uR(t)u$ 是关于 u 的二次函数，在全空间 R^r 中求极值问题，该函数对 u 的偏导数得方程组

$$\psi(t)B(t)-2u^\tau R(t)=0$$

依假定 $R(t)$对每一 $t\in[0,T]$是正定阵，得

$$u(t)=\frac{1}{2}R^{-1}(t)B^\tau(t)\psi^\tau(t) \tag{1.4.11}$$

将式(1.4.11)的 $u(t)$代入状态方程(1.4.1)，并同协态方程(1.4.9)，得到关于状态 $x(t)$和协态 $\psi(t)$满足的联立方程

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t)+\frac{1}{2}B(t)R^{-1}(t)B^\tau(t)\psi^\tau(t) \\ \dot{\psi}(t) &= 2x^\tau(t)Q(t)-\psi(t)A(t) \\ x(0) &= x_0 \\ \psi(T) &= -2x^\tau(T)P_1 \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

求解微分方程组(1.4.12)得 $\psi(t)$，然后把 $\psi(t)$代入式(1.4.11)，就得到最优控制 $u(t)$。

现在进一步讨论上面的问题：

(1)对 $Q(t)\equiv 0$，$P_1\neq 0$ 的情形。在这种情形，协态微分方程(1.4.9)为

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= -\psi(t)A(t) \\ \psi(T) &= -2x^\tau(T)P_1 \end{aligned} \tag{1.4.13}$$

微分方程(1.4.13)的解表示为

$$\psi(t) = -2x^{\tau}(T)P_1\Phi(T,t)$$

将 $\psi(t)$ 代入式(1.4.11)，得到最优控制

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^{\tau}(t)\Phi^{\tau}(T,t)P_1x(T) \qquad (1.4.14)$$

在表达式(1.4.14)中，$x(T)$是未知的，为了求得 $x(T)$，将 $u(t)$的表达式(1.4.14)代入状态方程(1.4.1)的解的表达式中，得

$$x(t) = \Phi(t,0)x_0 - \int_0^t \Phi(t,s)B(s)R^{-1}(s)B^{\tau}(s)\Phi^{\tau}(T,s)\mathrm{d}sP_1x(T)$$

在上式中，令 $t=T$，则可得到关于 $x(T)$的方程

$$x(T) = \Phi(T,0)x_0 - \int_0^T \Phi(T,s)B(s)R^{-1}(s)B^{\tau}(s) \times \Phi^{\tau}(T,s)\mathrm{d}sP_1x(T) \qquad (1.4.15)$$

约定

$$Q_c(T) = \int_0^T \Phi(T,s)B(s)R^{-1}(s)B^{\tau}(s)\Phi^{\tau}(T,s)\mathrm{d}s$$

则方程(1.4.15)可写为

$$(I + Q_c(T)P_1)x(T) = \Phi(T,0)x_0$$

如果矩阵$(I+Q_cP_1)$是满秩的，则

$$x(T) = (I + Q_c(T)P_1)^{-1}\Phi(T,0)x_0$$

将上式代入式(1.4.14)，得最优控制

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^{\tau}(t)\Phi^{\tau}(T,t)P_1(I + Q_c(T)P_1)^{-1}\Phi(T,0)x_0$$

(2)对 $Q(t)\neq 0$ 的情形。关于最优轨道 $x(t)$和协态 $\psi(t)$的微分方程组(1.4.12)，如果我们能求得矩阵 $P(t)$，使得

$$\psi^{\tau}(t) = -2P(t)x(t) \qquad (1.4.16)$$

然后将 $\psi^{\tau}(t)$代入式(1.4.11)，得到最优控制 $u(t)$是状态 $x(t)$的反馈形式。能否求得一矩阵 $P(t)$使得 $\psi(t)$与 $x(t)$有式(1.4.16)的形式？下面将解答这一问题。

假定对 $t\in[0,T]$，$P(t)$是可微的。对式(1.4.16)两端求导数，得

$$\dot{\psi}^{\tau}(t) = -2\dot{P}(t)x(t) - 2P(t)\dot{x}(t) \qquad (1.4.17)$$

式(1.4.17)两端的 $\dot{\psi}(t)$和 $\dot{x}(t)$，分别用方程(1.4.12)代入，得

$$2Q(t)x(t) + 2A^{\tau}(t)P(t)x(t) = -2\dot{P}(t)x(t) - 2P(t)A(t)x(t)$$

$$+ 2P(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t)x(t)$$

即 $(\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A'(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t)$

$$+ Q(t))x(t) = 0$$

由方程(1.4.12)关于 $\psi(t)$ 的终端条件和式(1.4.16),得

$$P(T)x(T) = P_1x(T)$$

所以,如果 $P(t)$ 是下面的矩阵常微分方程

$$\begin{aligned} &\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A'(t)P(t) \\ &- P(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t) + Q(t) = 0 \\ &P(T) = P_1 \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

的解,则由式(1.4.11)和式(1.4.16)得最优控制

$$u(t) = -R^{-1}(t)B'(t)P(t)x(t) \quad (1.4.19)$$

由常微分方程的理论已知,只要 $A(t)$、$B(t)$、$Q(t)$ 和 $R(t)$ 是分段连续的,微分方程(1.4.18)存在唯一解 $P(t)$。将式(1.4.19)代入状态方程(1.4.1),得闭环系统

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = (A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t))x(t) \\ &x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

求解微分方程(1.4.20)得到解 $x(t)$,把这个解 $x(t)$ 代入式(1.4.19)得最优控制(1.4.19)的表达式。

令

$$K(t) = -R^{-1}(t)B'(t)P(t) \quad (1.4.21)$$

则式(1.4.19)可写为

$$u(t) = K(t)x(t) \quad (1.4.22)$$

表达式(1.4.22)的意思是,把实时状态 $x(t)$ 放大 $K(t)$ 倍后,就得到最优控制 $u(t)$。即最优控制是由状态反馈产生,反馈增益阵 $K(t)$ 由 Riccati 微分方程(1.4.18)的解 $P(t)$ 和已知矩阵 $R^{-1}(t)$,$B(t)$ 经过关系式(1.4.21)表达出来。能用状态表达出来的控制称为系统的综合控制。从上面的讨论已知,线性系统二次性能指标的最优控制,当 $R(t)$ 是正定对称阵,$Q(t)$,P_1 是非负定对称阵时,是综合控制。在工程系统的设计中,为了提高系统的品质,要求得到系统的控制是状态的函数,即是综合控制,而不是时间函数的控制。

由式(1.4.19)已知，线性系统二次性能指标的控制问题的最优控制，可用矩阵 Riccati 微分方程(1.4.18)的解 $P(t)$，经过式(1.4.19)表达出来。因此，问题最后归结为求 Riccati 微分方程(1.4.18)的解。

矩阵 Riccati 微分方程(1.4.18)是非线性的常微分方程组，下面讨论用一个 $2n\times n$ 阶的线性微分方程组的解来构造出矩阵 Riccati 微分方程(1.4.18)的解。

考虑 $2n\times n$ 阶的线性常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^{\tau}(t) \\ -Q(t) & -A^{\tau}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (1.4.23)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}(t_1) = \begin{pmatrix} I \\ P_1 \end{pmatrix}$$

定理 1.4 设 $P(t,P_1,t_1)$是终端时刻为 t_1，状态为 P_1 的矩阵 Riccati 微分方程(1.4.18)的解，$X(t)$，$Y(t)$是线性微分方程组(1.4.23)的解，则

$$P(t,P_1,t_1) = Y(t)X^{-1}(t)$$

证 由非线性常微分方程的理论已知，矩阵 Riccati 微分方程(1.4.18)的解存在。可以证明，这个解的存在的区间是$(-\infty,t_1]$，记为 $P(t)=P(t,P_1,t_1)$，$\forall\ t\leqslant t_1$。首先证明，$\forall\ t\leqslant t_1$，矩阵 $X(t)$的逆 $X^{-1}(t)$存在。

考虑常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = (A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^{\tau}(t)P(t))Z(t)$$

上面线性常微分方程组的基本解矩阵记为 $\Phi(t,\tau)$，$\Phi(\tau,\tau)=I$。依基本解矩阵的性质，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t,t_1) &= (A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^{\tau}(t)P(t))\Phi(t,t_1) \\ &= A(t)\Phi(t,t_1) - B(t)R^{-1}(t)B^{\tau}(t)(P(t)\Phi(t,t_1))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P(t)\Phi(t,t_1)) &= \dot{P}(t)\Phi(t,t_1) + P(t)\dot{\Phi}(t,t_1) \\ &= (-A^{\tau}(t)P(t) - P(t)A(t)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+P(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t)\\
&-Q(t))\Phi(t,t_1)+P(t)A(t)\Phi(t,t_1)\\
&-P(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t)\Phi(t,t_1)\\
=&-Q(t)\Phi(t,t_1)-A'(t)(P(t)\Phi(t,t_1))
\end{aligned}
$$

上面两个恒等式可写成

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\Phi(t,t_1)\\ P(t)\Phi(t,t_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B'(t)\\ -Q(t) & -A'(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi(t,t_1)\\ P(t)\Phi(t,t_1)\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}\Phi(t,t_1)\\ P(t)\Phi(t,t_1)\end{pmatrix}\Bigg|_{t=t_1}=\begin{pmatrix}I\\ P_1\end{pmatrix}
$$

因此

$$
\begin{pmatrix}\Phi(t,t_1)\\ P(t)\Phi(t,t_1)\end{pmatrix}
$$

是微分方程(1.4.23)的解，由微分方程的解的唯一性，得

$$
X(t)=\Phi(t,t_1),Y(t)=P(t)\Phi(t,t_1) \tag{1.4.24}
$$

基本解矩阵 $\Phi(t,t_1)$是可逆阵，因此，$\forall\ t\leqslant t_1$，$X(t)$是可逆矩阵。

其次，由假设

$$
\begin{pmatrix}X(t)\\ Y(t)\end{pmatrix}
$$

是微分方程组(1.4.23)的解，则

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Y(t)X^{-1}(t))&=\dot{Y}(t)X^{-1}(t)-Y(t)X^{-1}(t)\dot{X}(t)X^{-1}(t)\\
&=(-Q(t)X(t)-A'(t)Y(t))X^{-1}(t)\\
&\quad-Y(t)X^{-1}(t)(A(t)X(t)-B(t)R^{-1}(t)B'(t)Y(t))X^{-1}(t)\\
&=-Q(t)-A'(t)(Y(t)X^{-1}(t))-(Y(t)X^{-1}(t))A(t)\\
&\quad+(Y(t)X^{-1}(t))B(t)R^{-1}(t)B'(t)(Y(t)X^{-1}(t))\\
&\quad Y(t_1)X^{-1}(t_1)=Y(t_1)I=P_1
\end{aligned}
$$

所以，$Y(t)X^{-1}(t)$是 Riccati 微分方程(1.4.18)的解，依微分方程解的唯一性，得

$$
P(t,P_1,t_1)=Y(t)X^{-1}(t)
$$

证毕

第二章 集中参数系统的最优控制
（动态规划法）

在第一章讨论的系统的最优控制问题，除描述系统的状态变量外，还引入系统的协态和相应于控制问题的 Hamiltonian 函数，最优控制使得系统的状态过程和协态过程满足 Hamiltonian 微分方程组和 Hamiltonian 函数沿着系统的最优轨道取最大值。本章讨论系统的最优控制问题，采用与上述观点完全不同的观点和方法，称为动态规划法。动态规划法是建立在称为 R. Bellman 的动态规划原理的基础上。从观念上讲，动态规划原理是把原来的一个最优控制问题考虑成按动态系统的初值参数化了的一族控制系统的最优控制问题。主要内容是这一族动态系统的最优控制问题的性能指标的最优值函数，满足称为 Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程（简写成 HJB 方程）。一旦得到这个 HJB 偏微分方程的解，就可求得最优反馈控制律、最优控制和性能指标的最优值。最优控制理论的动态规划方法的重要性在于 HJB 偏微分方程理论提供了系统的开环和反馈之间的一种联系。20 世纪 80 年代初期，关于 HJB 偏微分方程的粘性解的概念的引入和粘性解理论的建立，使得最优控制问题的动态规划方法有了严格的数学理论基础。

本章我们讨论最优控制的动态规划方法时，用现代非线性泛函分析中的非线性算子半群方法来建立 HJB 偏微分方程。用动态系统的初始状态参数化了的一族动态系统的最优控制问题的性能指标最优值函数，来定义一族非线性算子的半群，某一光滑函数类被包含在这个非线性算子半群的生成算子的定义域内，在这个光滑函数类上，用非线性算子半群的可微性结果，使得 HJB 偏微分

方程。本章在处理问题时，重点是理论框架，而不是条件的强弱，有些地方所加的条件还可放弱一些。

§2.1 问题的叙述

设某一个受控系统用下面的常微分方程组来描述

$$\frac{dy}{ds}=g(y(s),u(s)),0<s\leqslant T \tag{2.1.1}$$

$$y(0)=x\in R^n$$

受控系统(2.1.1)的性能指标为

$$J(u(\cdot))=\int_0^T f(y(s),u(s))ds+h(y(T)) \tag{2.1.2}$$

设 $U\subset R^r$ 是 r 维欧氏空间 R^r 中的一个子集，定义容许控制类

$U_{ad}^T=\{u(t)|u(\cdot):[0,T]\to R^r$ 是有界可测函数，$u(t)\in U$，a.e. $t\in[0,T]\}$

问题是求 $u^*(\cdot)\in U_{ad}^T$，使得

$$J(u^*(\cdot))=\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}^T} J(u(\cdot))$$

任一 $u(\cdot)\in U_{ad}^T$ 称为容许控制，相应于容许控制 $u(\cdot)$ 的方程(2.1.1)的解 $y(s)$，称为容许轨道。$u^*(\cdot)$ 称为控制问题(2.1.1)—(2.1.2)的最优控制，相应于最优控制 $u^*(\cdot)$ 的微分方程(2.1.1)的解 $y^*(s)$，称为最优轨道。

对于 $\forall\, t>0$，考虑受控系统

$$\frac{dy}{ds}=g(y(s),u(s)),0<s\leqslant t \tag{2.1.3}$$

$$y(0)=x\in R^n$$

和性能指标

$$V(t,x,h,u(\cdot))=\int_0^t f(y(s),u(s))ds+h(y(t)) \tag{2.1.4}$$

为了强调微分方程(2.1.3)的解 $y(s)$ 依赖于初始时间 $t=0$ 和初始时间 $t=0$ 的初始状态 x，记为 $y_{0,x}(s)$。因此，性能指标(2.1.4)

的右端依赖初始状态 x、积分上限 t、h 和 $u(\cdot)$。记为 $V(t,x,h,u(\cdot))$。

记

$$V(t,x,h)=\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}^{t}} V(t,x,h,u(\cdot)) \qquad (2.1.5)$$

§2.2 非线性算子半群与 Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程

本节我们假定：

(A_1) $g(\cdot,\cdot):R^n\times U\to R^n$ 连续，存在正常数 $\bar{g}$，使得

$$|g(x,u)-g(y,u)|\leqslant \bar{g}|x-y| \quad \forall\ x,y\in R^n,u\in U$$

(A_2) 存在正常数 g_0，使得 $\forall\ u(\cdot)\in U_{ad}^T$

$$\int_0^T |g(0,u(s))|^2 \mathrm{d}s\leqslant g_0$$

用 $BUC(R^n)=C(R^n)$ 表示定义在 R^n 上的有界一致连续函数全体。

(A_3) $\forall\ u\in U$，$f(\cdot,u)\in C(R^n)$，$h(\cdot)\in C(R^n)$ 和 $f(x,u)$ 满足条件 (A_1)。

在 (A_1) 条件下，微分方程(2.1.3)存在唯一解 $y(s)=y(s,x,u(\cdot))$。

引理 2.1 在 (A_1) 和 (A_2) 条件下，存在正常数 k_1、k_2 和 k_3，使得下面的估计式成立

(1) $|y(s,x,u(\cdot))|^2\leqslant k_1(|x|^2+s) \quad \forall\ x\in R^n,s\in[0,t]$

(2) $|y(\tau,x,u(\cdot))-y(s,x,u(\cdot))|^2\leqslant k_2|\tau-s|^2(|x|^2+t)$
$+2g_0|\tau-s| \quad \forall\ x\in R^n,\tau,s\in[0,t]$

(3) $|y(s,x,u(\cdot))-y(s,z,u(\cdot))|^2\leqslant 2\bar{g}|x-z|e^{k_3 s} \quad \forall\ x,z\in R^n,s\in[0,t]$

证 由条件 (A_1)，有

$$|g(y,u)|^2\leqslant 2\bar{g}|y|^2+2|g(0,u)|^2 \quad \forall\ y\in R^n,u\in U \qquad (2.2.1)$$

从微分方程(2.1.3)和式(2.2.1),得

$$|y(s)|^2 \leqslant 2|x|^2 + 2\left|\int_0^s g(y(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau\right|^2$$

$$\leqslant 2|x|^2 + 2s\int_0^s |g(y(\tau),u(\tau))|^2\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant 2|x|^2 + 4\bar{g}s\int_0^s |y(\tau)|^2\mathrm{d}\tau + 4s\int_0^s |g(0,u(\tau))|^2\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant (2|x|^2 + 4g_0 s) + 4\bar{g}t\int_0^s |y(\tau)|^2\mathrm{d}\tau$$

用 Gronwall's 不等式,存在正常 k_1,使得

$$|y(s,x,u(\cdot))|^2 \leqslant k_1(|x|^2 + s) \quad \forall\, x \in R^n, s \in [0,t]$$

对$\forall\ \tau,s\in[0,t]$,$\forall\ x\in R^n$,从微分方程(2.1.3)的解,式(2.2.1)和估计式(1),得

$$|y(\tau,x,u(\cdot)) - y(s,x,u(\cdot))|^2 = \left|\int_s^\tau g(y(\alpha),u(\alpha))\mathrm{d}\alpha\right|^2$$

$$\leqslant |\tau - s|\left|\int_s^\tau |g(y(\alpha),u(\alpha))|^2\mathrm{d}\alpha\right|$$

$$\leqslant 2\bar{g}|\tau - s|\left|\int_s^\tau |y(\alpha)|^2\mathrm{d}\alpha\right| + 2|\tau - s|\left|\int_s^\tau |g(0,u(\alpha))|^2\mathrm{d}\alpha\right|$$

$$\leqslant 2\bar{g}k_1|\tau - s|^2(|x|^2 + t) + 2g_0|\tau - s|$$

这就证明了估计式(2)。

对$\forall\ x,z\in R^n$,$s\in[0,t]$,从微分方程(2.1.3),得

$$|y(s,x,u(\cdot)) - y(s,z,u(\cdot))|^2 \leqslant 2|x - z|^2 + 2s\int_0^s |g(y_x(\tau),u(\tau)) - g(y_z(\tau),u(\tau))|^2\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant 2|x - z|^2 + 2\bar{g}t\int_0^s |y(\tau,x,u(\cdot)) - y(\tau,z,u(\cdot))|^2\mathrm{d}\tau$$

用 Gronwall's 不等式得到估计式(3)。 证毕

引理 2.2 在(A_1),(A_2)和(A_3)条件下,则

(1)$\forall\ u(\cdot)\in U_{ad}$一致地有 $V(\cdot,\cdot,h,u(\cdot))\in C([0,T]\times R^n)=BUC([0,T]\times R^n)$

(2)$V(\cdot,\cdot,h)\in C([0,T]\times R^n)$

证 依引理 2.1,方程(2.1.3)的解 $y(t,x,u(\cdot))$对$(t,x)\in R_+^1$

$\times R^n$ 是连续的。从而由条件(A_3)，$f(\cdot,u)\in BUC(R^n)$，$h(\cdot)\in BUC(R^n)$得到$V(\cdot,\cdot,h,u(\cdot))\in C([0,T]\times R^n)$，对 $u(\cdot)\in U_{ad}$一致地成立。依 $V(t,x,h)$的定义，得

$$V(\cdot,\cdot,h)\in BUC([0,T]\times R^n)$$ 证毕

定理 2.1 对$\forall s,t\in R_+^1$，$s\leqslant t$，在(A_1)，(A_2)和(A_3)条件下，有

$$V(t,x,h)=V(s,x,V(t-s,\cdot,h))$$

证 首先证明不等式

$$V(t,x,h)\geqslant V(s,x,V(t-s,\cdot,h))$$

对任一$u(\cdot)\in U_{ad}^t$，依 $V(t,x,h,u(\cdot))$的定义，有

$$\begin{aligned}V(t,x,h,u(\cdot))&=\int_0^t f(y(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau+h(y(t))\\&=\int_0^s f(y_{0,x}(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau\\&\quad+\int_s^t f(y_{0,x}(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau+h(y_{0,x}(t))\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

作自变量代换，令 $\tau=s+\alpha$。于是有

$$\begin{aligned}&\int_s^t f(y_{0,x}(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau+h(y_{0,x}(t))\\&=\int_0^{t-s} f(y_{0,x}(s+\alpha),u(s+\alpha))\mathrm{d}\alpha+h(y_{0,x}(t))\\&=\int_0^{t-s} f(y_{s,y(s)}(\alpha),u(s+\alpha))\mathrm{d}\alpha+h(y_{s,y(s)}(t-s))\\&=V(t-s,y(s),h,u(s+\cdot))\\&\geqslant V(t-s,y(s),h)\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

将式(2.2.3)代入式(2.2.2)，得

$$\begin{aligned}V(t,x,h,u(\cdot))&\geqslant\int_0^s f(y_{0,x}(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau+V(t-s,y(s),h)\\&=V(s,x,V(t-s,\cdot,h),u(\cdot))\end{aligned}$$

上面的不等式对任意的 $u(\cdot)\in U_{ad}^t$成立，因此得

$$V(t,x,h)\geqslant V(s,x,V(t-s,\cdot,h))$$

现在要证明相反的不等式：

$$V(t,x,h)\leqslant V(s,x,V(t-s,\cdot,h))\tag{2.2.4}$$

事实上，依 $V(t,x,h)$ 的定义，对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $u_\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$V(t-s,x,h,u_\varepsilon(\cdot))<V(t-s,x,h)+\varepsilon \qquad (2.2.5)$$

依前面的式(2.2.2)、式(2.2.3)和不等式(2.2.5)，有

$$\begin{aligned}V(t,x,h)&\leqslant V(t,x,h,u_\varepsilon(\cdot))=V(s,x,V(t-s,x,h,u_\varepsilon(\cdot)))\\&\leqslant V(s,x,V(t-s,x,h)+\varepsilon)\\&\leqslant V(s,x,V(t-s,x,h))+\varepsilon\end{aligned}$$

但是 $\varepsilon>0$ 是任意的，这就得式(2.2.4)。　　证毕

现在在函数空间 $C(R^n)=BUC(R^n)$ 上用上确界来定义范数，即是任一 $\varphi(\cdot)\in C(R^n)$，定义范数：

$$\|\varphi\|=\sup_{x\in R^n}|\varphi(x)|$$

在 $C(R^n)$ 上的元之间的加法和数乘运算，按通常的方式定义，则 $C(R^n)$ 是一个 Banach 空间。在这个 Banach 空间上定义算子族如下

对 $\forall\ t\geqslant 0$ 和任一 $h(\cdot)\in C(R^n)$，定义

$$(V(t)h)(x)=V(t,x,h)$$

则

$$V(0)=I$$

和用定理 2.1，有

$$\begin{aligned}(V(t+s)h)(x)&=V(t+s,x,h)=V(t,x,V(s,\cdot,h))\\&=(V(t)V(s,\cdot,h))(x)\\&=(V(t)V(s)h)(x)\quad\forall\ h\in C(R^n)\end{aligned}$$

即

$$V(t+s)=V(t)V(s)\quad\forall\ t,s\geqslant 0$$

并且成立

$$\|V(t)h_1-V(t)h_2\|\leqslant\|h_1-h_2\|\quad\forall\ h_1,h_2\in C(R^n)$$

其中

$$\|h\|=\sup_{x\in R^n}|h(x)|$$

所以，单参数算子族 $\{V(t);t\geqslant 0\}$ 是 $C(R^n)$ 空间上的非线性算子压缩半群。并且，对 $\forall\ h\in C(R^n)$，有

$$\|V(t)h-h\|\to 0\quad(t\downarrow 0)$$

和如果 $h_1,h_2\in C(R^n)$，使得 $h_1(x)\leqslant h_2(x)$，$\forall\ x\in R^n$，则

$$V(t)h_1 \leqslant V(t)h_2$$

用 A 表示非线性算子压缩半群 $\{V(t);t\geqslant 0\}$ 的生成算子，$D(A)$ 表示生成算子 A 的定义域，∇ 表示梯度算符，$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$。

令

$$C^1(R^n) = \{h(x)\,|\,h(\cdot) \in C(R^n),\partial_i h = h_{x_i}(x) \in C(R^n),$$
$$i = 1,2,\cdots,n\}$$

定理 2.2 在条件 (A_1)，(A_2) 和 (A_3) 下，$C^1(R^n) \subset D(A)$，并且 $\forall\, h(\cdot) \in C^1(R^n)$，成立关系式

$$(Ah)(x) = \sup_{u\in U}\{g(x,u)\cdot \nabla h(x) + f(x,u)\} \tag{2.2.6}$$

其中"·"表欧几里得内积。

证 首先证明，$\forall\, h \in C^1(R^n)$ 成立下式

$$\frac{1}{t}\left|V(t,x,h,u(\cdot)) - h(x) - \int_0^t\{f(x,u(s)) + g(x,u(s))\cdot\nabla h(x)\}ds\right|$$
$$\to 0(t\downarrow 0)，关于\ u(\cdot) \in U_{ad}^T\ 一致地成立。\tag{2.2.7}$$

事实上，依定义有

$$V(t,x,h,u(\cdot)) - h(x) = \int_0^t f(y(s),u(s))ds + h(y(t)) - h(x)$$

由此得

$$\left|V(t,x,h,u(\cdot)) - h(x) - \int_0^t f(x,u(s))ds - \int_0^t g(x,u(s))\cdot\nabla h(x)ds\right|$$
$$\leqslant \int_0^t |f(y(s),u(s)) - f(x,u(s))|ds$$
$$+ \left|h(y(t)) - h(x) - \int_0^t g(x,u(s))\cdot\nabla h(x)ds\right|$$
$$\leqslant \bar{f}\int_0^t |y(s) - x|ds + |(y(t) - x)\cdot\nabla h(x + \theta(y(t) - x))$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_0^t g(x,u(s)) \cdot \nabla h(x)\mathrm{d}s| \\
&\leqslant \bar{f}\int_0^t |y(s) - x|\mathrm{d}s + |\int_0^t g(y(s),u(s)) \\
&\cdot [\nabla h(x + \theta(y(t) - x)) - \nabla h(x)]\mathrm{d}s| \\
&+ |\int_0^t \{g(y(s),u(s)) - g(x,u(s))\} \cdot \nabla h(x)\mathrm{d}s| \\
&\leqslant c_1\int_0^t |y(s) - x|\mathrm{d}s + \int_0^t |g(y(s),u(s))|\mathrm{d}s \\
&\times |\nabla h(x + \theta(y(t) - x)) - \nabla h(x)| \qquad (2.2.8)
\end{aligned}
$$

式中 $\theta \in (0,1)$。

在式(2.2.8)的两端用 $t>0$ 除，然后令 $t \downarrow 0$，得式(2.2.7)。

其次，有

$$
\begin{aligned}
&\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}^t} \int_0^t \{f(x,u(s)) + g(x,u(s)) \cdot \nabla h(x)\}\mathrm{d}s \\
&\quad \leqslant \int_0^t \sup_{u\in U}\{f(x,u) + g(x,u) \cdot \nabla h(x)\}\mathrm{d}s \\
&\quad = t\sup_{u\in U}\{f(x,u) + g(x,u) \cdot \nabla h(x)\}
\end{aligned}
$$

对 $\varepsilon>0$ 足够小，存在 $u_\varepsilon \in U$，使得上式右端

$$
\begin{aligned}
&\leqslant t\{f(x,u_\varepsilon) + g(x,u_\varepsilon) \cdot \nabla h(x)\} + \varepsilon \\
&\leqslant \sup_{u(\cdot)\in U_{ad}^t} \int_0^t \{f(x,u(s)) + g(x,u(s)) \cdot \nabla h(x)\}\mathrm{d}s + \varepsilon
\end{aligned}
$$

但是 $\varepsilon>0$ 是任意小的，由上式左右两端，得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}^t} \int_0^t \{f(x,u(s)) + g(x,u(s)) \cdot \nabla h(x)\}\mathrm{d}s \\
&\quad = t\sup_{u\in U}\{f(x,u) + g(x,u) \cdot \nabla h(x)\} \qquad (2.2.9)
\end{aligned}
$$

由式(2.2.7)和式(2.2.9)，得

$$
\left|\frac{V(t,x,h) - h(x)}{t} - \sup_{u\in U}\{f(x,u) + g(x,u) \cdot \nabla h(x)\}\right| \to 0
$$

$(t \downarrow 0)$

这就是说，当 $\forall\, h(\cdot) \in C^1(R^n)$ 时，极限

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{V(t)h-h}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{V(t,x,h)-h(x)}{t}$$

存在，并且依生成算子的定义和上式有

$$(Ah)(x)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{V(t)h-h}{t}$$
$$=\sup_{u\in U}\{f(x,u)+g(x,u)\cdot\nabla h(x)\}$$ 证毕

推论 设$\forall t>0, V(t,\cdot,h)\in C^1(R^n)$，则$V(t,x,h)$是下面的抛物型偏微分方程

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}=\sup_{u\in U}\{f(x,u)+g(x,u)\cdot\nabla V(t,x)\}$$
$$=AV(t,x) \tag{2.2.10}$$
$$V(0,x)=h(x)\in C^1(R^n)$$

的解。偏微分方程(2.2.10)称为 Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程，简写为 HJB 偏微分方程。

记

$\hat{U}^T_{ad}=\{u(t)\mid u(\cdot)\in U^T_{ad}, u(t)$在区间$[0,T]$上是分段常值的函数$\}$

引理 2.3 对任一$u(\cdot)\in U^T_{ad}$，存在列$\{u_k(\cdot)\}\subset\hat{U}^T_{ad}$，使得

$$\int_0^T|u_k(t)-u(t)|^2dt\to 0\ (k\to\infty)$$

证 将函数$u(t)$延拓成为$(-\infty,\infty)$上的函数：对$t\leqslant 0$，令$u(t)=u(0)$，对$t\geqslant T$，令$u(t)=u(T)$。

令

$$\varphi_n(t)=\frac{i}{2^n}, \text{当 } i2^{-n}<t\leqslant(i+1)2^{-n}$$
$$(i=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

对固定τ，约定

$$u_n(t)=u(\varphi_n(t-\tau)+\tau)$$

则 $\forall n, u_n(\cdot)\in\hat{U}^T_{ad}$

对$u(t)$定义函数

$$\bar{u}(t)=\int_0^t u(s)ds$$

令

$$\tilde{u}_m(t) = m\int_{\left(t-\frac{1}{m}\right)\vee 0}^{t} u(s)\mathrm{d}s = m\left[\tilde{u}(t) - \tilde{u}\left(\left(t-\frac{1}{m}\right)\vee 0\right)\right]$$

则 $\tilde{u}(t)$ 和 $\tilde{u}_m(t)$ 都是 t 的连续函数。

对几乎一切 $t\in[0,T]$，$\tilde{u}(t)$ 有导数 $\tilde{u}'(t)=u(t)$，并且

$$\tilde{u}'(t) = \lim_{m\to\infty}\left[\tilde{u}(t) - \tilde{u}\left(t-\frac{1}{m}\right)\vee 0\right]m$$

$$= \lim_{m\to\infty}\tilde{u}_m(t)$$

因此，有

$$\lim_{m\to\infty}\tilde{u}_m(t) = u(t), a.e. t\in[0,T]$$

因为 $u(t)$ 是有界可测函数，用控制收敛定理

$$\int_0^T|\tilde{u}_m(t) - u(t)|^2\mathrm{d}t \to 0(m\to\infty)$$

用 Minkovsky 不等式，得

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left(\int_0^T|u(s+h) - u(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{h\to 0}}\left(\int_0^T|\tilde{u}_m(s+h) - \tilde{u}_m(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}$$

$$+ \overline{\lim_{h\to 0}}\left(\int_0^T|\tilde{u}_m(s+h) - u(s+h)|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}$$

$$+ \overline{\lim_{h\to 0}}\left(\int_0^T|\tilde{u}_m(s) - u(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2} \to 0 \quad (m\to\infty)$$

依函数 $\varphi_n(t)$ 的定义，$\varphi_n(t)\to t(n\to\infty)$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T|u(s+\varphi_n(t)) - u(s+t)|^2\mathrm{d}s = 0$$

再用控制收敛定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_0^T|u(s+\varphi_n(t)) - u(s+t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t = 0$$

因此，存在子列，使得

$$\{u(s+\varphi_{n_k}(t)) - u(t+s)\}\to 0(k\to\infty), a.e. s,t\in[0,T]$$

记上述子列不收敛于零的例外集为 A，则

$$\int_0^T\int_0^T\chi_A(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = 0$$

这里 χ_A 表示集 A 的示性函数。于是作为 τ 的函数

$$\int_0^T \chi_A \mathrm{d}s = 0, a.e.\ \tau \in [0,T]$$

所以存在点 $\hat{\tau} \in [0,T]$，使得

$$\{u(\hat{\tau} + \varphi_{n_k}(s - \hat{\tau})) - u(s)\} \to 0 \quad (k \to \infty), a.e.\ s \in [0,T]$$

用控制收敛定理，得

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T |u(\hat{\tau} + \varphi_{n_k}(s - \hat{\tau})) - u(s)|^2 \mathrm{d}s = 0$$

现在，令

$$u_k(s) = u(\hat{\tau} + \varphi_{n_k}(s - \hat{\tau}))$$

则函数列 $\{u_k(\cdot)\}$ 满足引理的要求。　　　　证毕

设 $\rho(\cdot)$：$[0,\infty) \to R_+^1$ 的连续增函数，$\rho(0)=0$

(A_1')　$g(x,u)$ 满足条件：

$$|g(x_1,u_1) - g(x_2,u_2)| \leqslant \bar{g}|x_1 - x_2| + \rho(|u_1 - u_2|),$$
$$\forall\ x_1,x_2 \in R^n, u_1,u_2 \in U。$$

引理 2.4　在 (A_1') 的假定下，设 $u_i(\cdot) \in U_{ad}^T (i=1,2)$，$y_i(t)$ 是相应于 $u_i(t)$ 的微分方程(2.1.1)的具有初始条件 $y_i(0)=x(i=1,2)$ 的解，则

$$|y_1(t) - y_2(t)|^2 \leqslant 2Te^{2\bar{g}T}\int_0^t \rho^2(|u_1(s) - u_2(s)|)\mathrm{d}s$$

证　因为 $y_1(t)$，$y_2(t)$ 满足微分方程(2.1.1)和具有相同的初始条件，用条件 (A_1')，可得

$$\begin{aligned}|y_1(t) - y_2(t)|^2 &\leqslant \left(\int_0^t |g(y_1(s),u_1(s)) - g(y_2(s),u_2(s))|^2 \mathrm{d}s\right)^2 \\ &\leqslant \left(\bar{g}\int_0^t |y_1(s) - y_2(s)|\mathrm{d}s\right. \\ &\qquad \left.+ \int_0^t \rho(|u_1(s) - u_2(s)|)\mathrm{d}s\right)^2 \\ &\leqslant 2\bar{g}^2\left(\int_0^t |y_1(s) - y_2(s)|\mathrm{d}s\right)^2 \\ &\qquad + 2\left(\int_0^t \rho(|u_1(s) - u_2(s)|)\mathrm{d}s\right)^2\end{aligned}$$

$$\leqslant 2\bar{g}^2 T\int_0^t |y_1(s) - y_2(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$+ 2T\int_0^t \rho^2(|u_1(s) - u_2(s)|)\mathrm{d}s$$

用 Gronwall's 不等式，可得引理的结论。 证毕

引理 2.5 设 $U\subset R^r$ 是有界集，$u_k(\cdot)\in U_{ad}^T$ 和 $u(\cdot)\in U_{ad}^T$，$y(t)=y(t,u(\cdot))$，$y_k(t)=y(t,u_k(\cdot))$ 是相应于 $u(\cdot)$，$u_k(\cdot)$ 的微分方程(2.1.1)的具有初始条件 $y(0)=y_k(0)=x$ 的解，如果对任意 $t\in[0,T]$

$$\int_0^t |u_k(s) - u(s)|^2 \mathrm{d}s \to 0 \quad (k\to\infty) \tag{2.2.11}$$

则

$$|y_k(t) - y(t)|^2 + \int_0^t |y_k(s) - y(s)|^2 \mathrm{d}s \to 0 \quad (k\to\infty)$$

证 对任给 $\varepsilon>0$，用函数 $\rho(\xi)$ 的连续性和 $\rho(0)=0$，让 $\delta>0$，使得 $\rho^2(\delta)<\varepsilon$。

令 $$e_k = \{s \mid s\in[0,t], |u_k(s)-u(s)|\geqslant\delta\}$$

用 U 是有界集的假定，存在正常数 a，使得

$$|u_k(s) - u(s)| \leqslant a, \forall\ s \in [0,T],$$

于是

$$\left|\int_0^t \rho^2(|u_k(s) - u(s)|)\mathrm{d}s = \int_{e_k} \rho^2(|u_k(s) - u(s)|)\mathrm{d}s\right.$$

$$+ \int_{e_k^c} \rho^2(|u_k(s) - u(s)|)\mathrm{d}s \leqslant \rho^2(a)\mathrm{mes}\ e_k + \varepsilon t$$

其中，e_k^c 表示集合 e_k 的补集。

依集合 e_k 的定义，有下式

$$\int_0^t |u_k(s) - u(s)|^2 \mathrm{d}s \geqslant \int_{e_k} |u_k(s) - u(s)|^2 \mathrm{d}s \geqslant \delta^2 \mathrm{mes}\ e_k$$

由上述两个不等式，得

$$\int_0^t \rho^2(|u_k(s) - u(s)|)\mathrm{d}s \leqslant (\rho^2(a)/\delta^2)\int_0^t |u_k(s) - u(s)|^2 \mathrm{d}s + \varepsilon t$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以在引理的条件(2.2.11)之下，有

$$\int_0^t \rho^2(|u_k(s) - u(s)|)\mathrm{d}s \to 0 \quad (k\to\infty)$$

再用引理 2.4 的结论，本引理得证。 证毕

引理 2.6 设 g 和 f 满足条件(A_1)，$U\subset R^r$ 是有界集，由式(2.1.5)定义的函数 $V(t,x,h)$ 有

$$V(t,x,h)=\inf_{u(\cdot)\in \hat{U}^t_{ad}} V(t,x,h,u(\cdot))$$

证 依定义，对$\forall\ t>0$，$\hat{U}^t_{ad}\subset U^t_{ad}$，成立不等式

$$\begin{aligned}V(t,x,h)&=\inf_{u(\cdot)\in U^t_{ad}} V(t,x,h,u(\cdot))\\&\leqslant \inf_{u(\cdot)\in \hat{U}^t_{ad}} V(t,x,h,u(\cdot))\end{aligned}$$

因此，要证明引理，只须证明相反的不等式

$$V(t,x,h)\geqslant \inf_{u(\cdot)\in \hat{U}^t_{ad}} V(t,x,h,u(\cdot))$$

就够了。

对任一 $u(\cdot)\in U^T_{ad}$，依引理 2.3，存在列$\{u_k(\cdot)\}\subset \hat{U}^T_{ad}$，使得对一切 $t\leqslant T$，有

$$\int_0^t|u_k(s)-u(s)|^2\mathrm{d}s\to 0(k\to\infty)$$

依引理 2.5，得

$$V(t,x,h,u_k(\cdot))\to V(t,x,h,u(\cdot))(k\to\infty),\forall\ t,x,h$$

因此

$$\begin{aligned}\inf_{u(\cdot)\in \hat{U}^t_{ad}} V(t,x,h,u(\cdot))&\leqslant \lim_{k\to\infty} V(t,x,h,u_k(\cdot))\\&=V(t,x,h,u(\cdot))\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\inf_{u(\cdot)\in \hat{U}^t_{ad}} V(t,x,h,u(\cdot))&\leqslant \inf_{u(\cdot)\in U^t_{ad}} V(t,x,h,u(\cdot))\\&=V(t,x,h)\end{aligned}$$

证毕

用 $u\in U$ 表示常值控制 $u(t)\equiv u$，$y^u(t)$表示相应于 u 的微分方程(2.1.1)的解。定义算子 $T^u(t)$如下：

$$\forall\ h\in C(R^n)$$

$$(T^u(t)h)(x)=V(t,x,h,u),t\geqslant 0$$

则 $\{T^u(t);t\geqslant 0\}$是 $C(R^n)$上的非线性、压缩、单调算子半群。

定义 2.1 对 $u\in U$，$\{\hat{Q}(t);t\geqslant 0\}$，$\{\hat{T}^u(t);t\geqslant 0\}$是$C(R^n)$上的两个算子半群，称$\{\hat{Q}(t);t\geqslant 0\}$为$\{\hat{T}^u(t);t\geqslant 0\}$的包络，是指：

(1) $\hat{T}^u(t)h\geqslant\hat{Q}(t)h,\forall\ h\in C(R^n),t\geqslant 0,u\in U$，

(2) $\{\hat{Q}(t);t\geqslant 0\}$具有最大性质，即是，如果$\{A(t);t\geqslant 0\}$是$C(R^n)$上的满足(1)的半群，则$\hat{Q}(t)h\geqslant A(t)h\quad\forall\ h\in C(R^n),t\geqslant 0$。

定理 2.3 算子半群$\{V(t);t\geqslant 0\}$是算子半群$\{T^u(t);t\geqslant 0\}$的包络。

证 用算子半群的定义有

$$
\begin{aligned}
(T^u(t)h)(x) &= V(t,x,h,u)\geqslant\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}^T}V(t,x,h,u(\cdot))\\
&= V(t,x,h)=(V(t)h)(x)\quad\forall\ h\in C(R^n)
\end{aligned}
$$

因此，半群包络的定义中的(1)成立。

设$\{A(t);t\geqslant 0\}$是满足半群包络定义中的(1)的半群。N表示自然数，令$\Delta=2^{-N}$。用

$$
J(N)h=\inf_{u\in U}T^u(\Delta)h
$$

定义算子$J(N)$。于是$J:C(R^n)\to C(R^n)$。从而可以逐次定义J^k。则有下面的式(1)和式(2)成立。

(1) $J^kh\geqslant A(k\Delta)h,\forall$ 自然数k成立。

事实上，依$\{A(t);t\geqslant 0\}$是满足包络定义中的(1)的，所以(1)对$k=1$成立。假设对自然数k式(1)成立，则

$$
\begin{aligned}
J^{k+1}h &= J(J^kh)\geqslant J(A(k\Delta)h)\\
&\geqslant A(\Delta)A(k\Delta)h=A(k\Delta+\Delta)h\\
&= A((k+1)\Delta)h
\end{aligned}
$$

所以式(1)对任何自然数k成立。

(2) $\inf\limits_{u(\cdot)\in U_N}V(k\Delta,x,h,u(\cdot))\geqslant(J^kh)(x)$

其中

$$
U_N=\{u(t)\,|\,u(t)=u_i\in U,i2^{-N}\leqslant t<(i+1)2^{-N},\\
i=0,1,2,\cdots\}
$$

因此$u(\cdot)=u\in U$，有下面的不等式

$$
\inf_{u(\cdot)\in U_N}V(\Delta,x,h,u(\cdot))=\inf_{u\in U}V(\Delta,x,h,u)
$$

$$= (Jh)(x)$$

这就是说，式(2)对 $k=1$ 成立。

假设式(2)对自然数 k 成立。让 $u(\cdot)\in U_N$，用定理 2.1，得

$$\begin{aligned} V((k+1)\Delta,x,h,u(\cdot)) &= V(\Delta,x,V(k\Delta,\cdot,h),u(\cdot)) \\ &= \int_0^\Delta f(y(s),u)\mathrm{d}s + V(k\Delta,y(\Delta),h,u(\cdot)) \\ &\geqslant \int_0^\Delta f(y(s),u)\mathrm{d}s + (J^k h)(y(\Delta)) \\ &= V(\Delta,x,J^k h,u(\cdot)) \geqslant J(J^k h) \\ &= (J^{k+1}h)(x) \end{aligned}$$

因此式(2)对任何一个自然数 k 都成立。

由式(1)和(2)，对 $t=k2^{-N}$ 成立不等式

$$\inf_{u(\cdot)\in U_N} V(t,x,h,u(\cdot)) \geqslant (\Lambda(t)h)(x)$$

令 $N\to\infty$，用引理 2.6，得

$$\begin{aligned} (V(t)h)(x) = V(t,x,h) &= \inf_{u(\cdot)\in U_N} V(t,x,h,u(\cdot)) \\ &\geqslant (\Lambda(t)h)(x) \end{aligned}$$

对 t 是二进位数成立。

算子半群 $\{V(t);t\geqslant 0\}$ 和 $\{\Lambda(t);t\geqslant 0\}$ 对 t 连续，所以上述不等式对 $\forall\, t\geqslant 0$ 成立。 证毕

§2.3 反 馈 控 制

设 $u(\cdot)\in U_{ad}^t$ 是在 §2.1 中的控制问题(2.1.3)—(2.1.4)的最优控制，则 $J(t,x,h,u(\cdot))=J(t,x,h)$。特别重要的是反馈控制。如果控制 $u(s,x)$ 是在 U 中取值的 Borel 有界可测函数，使得对每一个 $x\in R^n$，微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y_x(s)}{\mathrm{d}s} = g(y_x(s),u(s,y_x(s))), 0 < s \leqslant t$$

$$y_x(0) = x$$

的解为 $y_x(s)$，则称 $u(s,x)=u(s,y_x(s))$，$s\in[0,t]$ 为反馈控制。

定理 2.4 设 $V(s,x)\in C^1([0,t]\times R^n)$ 是 HJB 偏微分方程

$$\frac{\partial V(s,x)}{\partial s} = \inf_{u\in U}\{f(x,u) + \nabla V(s,x)\cdot g(x,u)\} \tag{2.3.1}$$

$$V(0,x) = h(x)$$

的解。令

$$H(s,x,u) = f(x,u) + \nabla \hat{V}(s,x)\cdot g(x,u)$$

其中 $$\hat{V}(s,x) = V(t-s,x)$$

记 $\partial_s = \dfrac{\partial}{\partial s}$

如果 Borel 可测函数 $u(s,x)$，使得

$$\inf_{u\in U} H(s,x,u) = H(s,x,u(s,x)) \tag{2.3.2}$$

让 $y_x(s), s\in(0,t]$ 是常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s} = g(y(s),u(s,y(s))), s\in(0,t]$$

$$y(0) = x$$

的唯一解，则 $u_x(s)=u(s,y_x(s))$ 是在 §2.1 中的控制问题(2.1.3)—(2.1.4)的最优控制。

证 依假设 $V(s,x)$ 满足偏微分方程(2.3.1)，则 $\hat{V}(s,x)$ 满足下面的偏微分方程和终端条件

$$-\frac{\partial\hat{V}(s,x)}{\partial s} = \inf_{u\in U}\{f(x,u) + \nabla \hat{V}(s,x)\cdot g(x,u)\} \tag{2.3.3}$$

$$\hat{V}(t,x) = h(x)$$

由假定 $u(s,x)$ 使得式(2.3.2)成立，于是有下式

$$-\frac{\partial\hat{V}(s,x)}{\partial s} = f(x,u(s,x)) + \nabla_x\hat{V}(s,x)\cdot g(x,u(s,x)) \tag{2.3.4}$$

由式(2.3.4)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\hat{V}(s,y_x(s)) = \partial_s\hat{V}(s,y_x(s)) + \nabla_x\hat{V}(s,y_x(s))\cdot g(y_x(s),u(s,y_x(s)))$$

$$= -f(y_x(s), u(s, y_x(s))) \tag{2.3.5}$$

对上式两端从 0 到 t 积分，得

$$\hat{V}(t, y_x(t)) - \hat{V}(0, y_x(0)) = -\int_0^t f(y_x(s), u(s, y_x(s)))\mathrm{d}s \tag{2.3.6}$$

依定义有

$$\hat{V}(t, y_x(t)) = V(0, y_x(t)) = h(y(t))$$

$$\hat{V}(0, y_x(0)) = V(t, x)$$

代入式(2.3.6)的左端，得

$$V(t, x) = \int_0^t f(y_x(s), u(s, y_x(s)))\mathrm{d}s + h(y_x(t)) \tag{2.3.7}$$

现在对任一容许控制 $\tilde{u}(\cdot) \in U_{ad}^t$，从偏微分方程(2.3.3)

$$-\partial_s \hat{V}(s, x) \leqslant \{f(x, \tilde{u}(s)) + \nabla \hat{V}(s, x) \cdot g(x, \tilde{u}(s))\},$$

$$\forall x \in R^n, s \in (0, t]$$

记 $\tilde{y}(s), s \in (0, t]$ 是相应于容许控制 $\tilde{u}(s)$ 的微分方程(2.1.3)的解，则

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\hat{V}(s, \tilde{y}_x(s)) &= \partial_s \hat{V}(s, \tilde{y}_x(s)) \\ &\quad + \nabla \hat{V}(s, \tilde{y}_x(s)) \cdot g(\tilde{y}_x(s), \tilde{u}(s)) \\ &\geqslant -f(\tilde{y}_x(s), \tilde{u}(s)) \end{aligned}$$

对上述不等式从 0 到 t 两端积分，得

$$\hat{V}(t, y_x(t)) - \hat{V}(0, \tilde{y}_x(0)) \geqslant -\int_0^t f(\tilde{y}_x(s), \tilde{u}(s))\mathrm{d}s$$

即

$$V(t, x) \leqslant \int_0^t f(\tilde{y}_x(s), \tilde{u}(s))\mathrm{d}s + h(\tilde{y}_x(t)) \quad \forall \tilde{u}(\cdot) \in U_{ad}^t \tag{2.3.8}$$

所以，从式(2.3.7)和式(2.3.8)得到 $u_x(s) = u(s, y_x(s))$ 是控制问题(2.1.3)—(2.1.4)的最优控制，并且 HJB 偏微分(2.3.1)的解 $V(t, x)$ 是该最优控制问题的指标泛函的最优值。　　证毕

由定理 2.4 已知，用 HJB 偏微分方程的解来构造最优控制的步骤为

(1)求解 HJB 偏微分方程(2.3.1)得到 $V(s,x)$。

(2)求 Hamiltonian 函数

$$H(s,x,u) = f(x,u) + \nabla V(s,x)\cdot g(x,u)$$

的最小值得 $u(s,x)$，即

$$\min_{u\in U} H(s,x,u) = H(s,x,u(s,x))$$

(3)求解常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = g(y(s),u(s,y(s))),s\in(0,t]$$

$$y(0) = x$$

得解 $y_x(s),s\in[0,t]$

(4)从第(2)步求得的反馈律 $u(s,x)$ 和第(3)步求得的 $y_x(s)$，令

$$u_x(s) = u(s,y_x(s))$$

依定理 2.4，$u_x(s)$ 是控制问题(2.1.3)—(2.1.4)的最优控制。

从上述的讨论已知，用动态规划方法来构造最优控制的同时得到反馈控制律 $u(s,x)$ 和最优控制问题的性能指标的最优值 $V(t,x)$。

§ 2.4 Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程的解与协态的关系

本节将讨论用状态空间法来研究最优控制问题的 Pontryagin 最大值原理中的协态过程 $\psi(t)$ 与动态规划方法中的 HJB 偏微分方程的解之间的关系和最优控制的充分条件与唯一性。

考虑受控系统

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = g(y,u(s)),s\in(t,T] \tag{2.4.1}$$

$$y(t) = x\in R^n$$

受控系统(2.4.1)的性能指标为

$$V(t,x,u(\cdot)) = \int_t^T f(y(s),u(s))\mathrm{d}s + h(y(T)) \quad (2.4.2)$$

定义容许控制类：

$$U_{ad} = \{u(s) \mid u(\cdot) \in L^2((0,T),R^n), u(s) \in U, a.e.\ s \in [0,T]\}$$

令

$$V(t,x) = \inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} V(t,x,u(\cdot)) \quad (2.4.3)$$

定理 2.5 假定 $g(x,u)$，$f(x,u)$，$h(x)$ 关于 (x,u) 是 C^2 类函数，g 关于 (x,u) 的偏导数 g_x、g_u 有界，g、f 和 h 的所有二阶偏导数有界，如果存在 $u(\cdot)\in U_{ad}$ 和函数 $y(s)$，$\psi(s)$，$s\in[t,T]$，使得 $(y(s),\psi(s),u(s))$ 满足下面的微分方程组和条件

(1)常微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = g(y,u(s)), y(t) = x \quad (2.4.4)$$

$$-\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} = f_x(y(s),u(s)) + g_x^{\tau}(y(s),u(s))\psi \quad (2.4.5)$$

$$\psi(T) = h_x(y(T))$$

(2)最小值原理

$$H_u(y(s),\psi(s),u(s))\cdot(u - u(s)) \geqslant 0, a.e.\ s \in [t,T], \forall\ u \in U \quad (2.4.6)$$

式中 $$H(x,\psi,u) = f(x,u) + \psi\cdot g(x,u)$$

和 H_u 表示 Hamiltonian 函数 $H(x,\psi,u)$ 关于变元 u 的偏导数，"τ"表示转置运算。

(3)函数 $H(x,\psi,u)$ 关于变元 u 的二阶偏导数矩阵 $H_{uu}(x,\psi,u)$ 满足

$$H_{uu}(\xi,\psi(s),u) \geqslant \beta I, \forall\ \xi \in R^n, u \in U, s \in [t,T] \quad (2.4.7)$$

$\beta>0$ 是正常数，I 是空间 R^r 中的单位矩阵，

(4)函数 $H(x,\psi,u)$ 的关于 x 与 u 的二阶偏导数矩阵 $H_{xx}(x,\psi,u)$，$H_{uu}(x,\psi,u)$ 满足

$$H_{xx}(\cdot)-H_{xu}(\cdot)H_{uu}^{-1}(\cdot)H_{ux}(\cdot)\geqslant 0,\text{对}\ \forall\ (\xi,\psi(s),u)$$

作为(·)中的变元

$$\forall\ \xi\in R^n,s\in[t,T] \tag{2.4.8}$$

(5)函数 $h(x)$ 是满足凸性条件

$$h_{xx}(x)\geqslant 0,\forall\ x\in R^n \tag{2.4.9}$$

则

(a)容许控制 $u(\cdot)\in U_{ad}$ 是控制问题(2.4.1)—(2.4.2)的最优控制,并且最优控制是唯一的。

(b)$V(t,x)=V(t,x,u(\cdot))$,$V(t,x)$ 对 x 可微,并且

$$\psi(t)=D_xV(t,x)=D_xV(t,y(t)) \tag{2.4.10}$$

证 任一容许控制 $v(\cdot)\in U_{ad}$,令 $\hat{u}(\cdot)=v(\cdot)-u(\cdot)$。让 $x(s)$ 是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=g(x,v(s)),s\in(t,T] \tag{2.4.11}$$

$$x(t)=z\in R^n$$

的解。约定

$$\hat{x}(s)=x(s)-y(s)$$

依定理中关于 f 和 h 的可微性的假定,我们有

$$\begin{aligned}
&V(t,z,v(\cdot))-V(t,x,u(\cdot))=\int_t^T\{f_x(y,u)\hat{x}+f_u(y,u)\hat{u}\}\mathrm{d}s\\
&+h_x(y(T))\hat{x}(T)+\int_t^T\int_0^1\int_0^1\lambda\{f_{xx}(y+\lambda\mu\hat{x},u+\lambda\mu\hat{u})\hat{x}\hat{x}\\
&+2f_{xu}(y+\lambda\mu\hat{x},u+\lambda\mu\hat{u})\hat{x}\hat{u}+f_{uu}(y+\lambda\mu\hat{x},u+\lambda\mu\hat{u})\hat{u}\hat{u}\}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s\\
&+\int_0^1\int_0^1\lambda h_{xx}(y(T)+\lambda\mu\hat{x}(T))\hat{x}(T)\hat{x}(T)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

用 $\psi(t)$ 满足微分方程(2.4.5)和分部积分,得

$$\begin{aligned}
\int_t^T f_x(y,u)\hat{x}\mathrm{d}s&=-\int_t^T(\dot{\psi}+\psi\cdot g_x(y,u))\hat{x}\mathrm{d}s\\
&=-\int_t^T\dot{\psi}(s)\hat{x}(s)\mathrm{d}s-\int_t^T\psi\cdot g_x\hat{x}\mathrm{d}s=-h_x(y(T))\hat{x}(T)\\
&+\psi(t)(z-x)+\int_t^T\psi\cdot(g(y+\hat{x},u+\hat{u})-g(y,u))\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$-\int_t^T \psi \cdot g_x(y,u)\hat{x}\mathrm{d}s = -h_x(y(T))\hat{x}(T) + \psi(t)(z-x)$$

$$+\int_t^T \psi \cdot g_u \hat{u}\mathrm{d}s + \int_t^T\int_0^1\int_0^1 \lambda\psi \cdot \{g_{xx}(y+\lambda\mu\hat{x}, u+\lambda\mu\hat{u})\hat{x}\hat{x}$$

$$+2g_{xu}(\cdot,\cdot)\hat{x}\hat{u} + g_{uu}(\cdot,\cdot)\hat{u}\hat{u}\}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s \qquad (2.4.13)$$

将式(2.4.13)代入式(2.4.12)，得

$$V(t,z,v(\cdot)) - V(t,x,u(\cdot)) = \psi(t)\cdot(z-x)$$

$$+\int_t^T H_u(y(s),\psi(s),u(s))\hat{u}(s)\mathrm{d}s$$

$$+\int_t^T\int_0^1\int_0^1 \lambda\{H_{xx}(y+\lambda\mu\hat{x},\psi,u+\lambda\mu\hat{u})\hat{x}\hat{x}$$

$$+2H_{xu}(\cdot,\cdot,\cdot)\hat{x}\hat{u} + H_{uu}(\cdot,\cdot,\cdot)\hat{u}\hat{u}\}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \lambda h_{xx}(y(T)+\mu\lambda\hat{x}(T))\hat{x}(T)\hat{x}(T)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu \qquad (2.4.14)$$

在式(2.4.14)中，令 $v(\cdot)=u(\cdot)$，得

$$V(t,z,u(\cdot)) - V(t,x,u(\cdot)) = \psi(t)\cdot(z-x)$$

$$+\int_t^T\int_0^1\int_0^1 \lambda H_{xx}(y+\lambda\mu\hat{x},\psi,u)\hat{x}\hat{x}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \lambda h_{xx}(y(T)+\lambda\mu\hat{x}(T))\hat{x}(T)\hat{x}(T)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu \qquad (2.4.15)$$

用 $\hat{x}(s)$的定义和微分方程(2.4.11)，得

$$|\hat{x}(s)| \leqslant |z-x| + \int_t^s |g(x(\tau),u(\tau)) - g(y(\tau),u(\tau))|\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant |z-x| + \int_t^s |g_x(\cdot,\cdot)\cdot(x(\tau)-y(\tau))|\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant |z-x| + c\int_t^s |\hat{x}(\tau)|\mathrm{d}\tau$$

用 Gronwall's 不等式，得

$$|\hat{x}(s)| \leqslant c_1|z-x|, \forall\, s\in[t,T] \qquad (2.4.16)$$

由式(2.4.15)和(2.4.16)，得

$$V(t,z) - V(t,x) \leqslant \psi(t)\cdot(z-x) + c_2|z-x|^2 \qquad (2.4.17)$$

另一方面，从定理的条件(2.4.7)，矩阵 H_{uu}的逆矩阵 H_{uu}^{-1}存

在，用条件(2.4.7)和(2.4.8)，得

$$H_{xx}\hat{x}\hat{x}+2H_{xu}\hat{x}\hat{u}+H_{uu}\hat{u}\hat{u}$$
$$=H_{uu}(\hat{u}+H_{uu}^{-1}H_{ux}\hat{x})(\hat{u}+H_{uu}^{-1}H_{ux}\hat{x})$$
$$+(H_{xx}-H_{xu}H_{uu}^{-1}H_{ux})\hat{x}\hat{x}\geqslant 0 \qquad (2.4.18)$$

用不等式(2.4.18)和条件(2)与(5)，由式(2.4.14)，得

$$V(t,z,v(\cdot))-V(t,x,u(\cdot))\geqslant \psi(t)\cdot(z-x)$$

所以

$$V(t,z)-V(t,x)\geqslant \psi(t)\cdot(z-x) \qquad (2.4.19)$$

由不等式(2.4.17)和(2.4.19)，得

$$D_xV(t,x)=\psi(t)=D_xV(t,y(t))$$

这就证明了(b)。

在式(2.4.14)中，令 $z=x$。用定理的条件(5)和式(2.4.19)，得

$$V(t,x,v(\cdot))\geqslant V(t,x,u(\cdot)) \quad \forall\, v(\cdot)\in U_{ad}$$

这就证明了 $u(\cdot)$是最优控制。

如果 $v(\cdot),u(\cdot)\in U_{ad}$都是控制问题(2.4.1)—(2.4.2)的最优控制，在公式(2.4.14)中，令 $z=x$。用式(2.4.18)，得

$$0=V(t,x,v(\cdot))-V(t,x,u(\cdot))=\int_t^T H_u(y,\psi,u)\hat{u}\mathrm{d}s$$
$$+\int_t^T\int_0^1\int_0^1\{H_{uu}(\hat{u}+H_{uu}^{-1}H_{ux}\hat{x})(\hat{u}+H_{uu}^{-1}H_{ux}\hat{x})$$
$$+(H_{xx}-H_{xu}H_{uu}^{-1}H_{ux})\hat{x}\hat{x}\}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^1\int_0^1\lambda h_{xx}\hat{x}\hat{x}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu \qquad (2.4.20)$$

用定理的条件(2)、(4)和(5)，由式(2.4.20)，得

$$H_{uu}(\hat{u}+H_{uu}^{-1}H_{ux}\hat{x})(\hat{u}+H_{uu}^{-1}H_{ux}\hat{x})=0$$

用定理的条件(3)，由上式得

$$\hat{u}=-H_{uu}^{-1}H_{ux}\hat{x} \qquad (2.4.21)$$

依 $\hat{x}(s)=x(s)-y(s)$的定义，它满足下面的微分方程和初始条件

$$\dot{\hat{x}}(s)=g(y+\hat{x},u+\hat{u})-g(y,u)$$

$$
\begin{aligned}
&= g(y+\hat{x}, u - H_{uu}^{-1}H_{xu}\hat{x}) - g(y,u) \\
&= g_x(y+\lambda\hat{x}, u - \lambda H_{uu}^{-1}H_{xu}\hat{x})\hat{x} \\
&\quad - g_u(y+\lambda\hat{x}, u - \lambda H_{uu}^{-1}H_{xu}\hat{x})H_{uu}^{-1}H_{xu}\hat{x}
\end{aligned}
$$

$$\hat{x}(0) = 0$$

由此可得

$$|\hat{x}(s)| \leqslant c\int_t^s |\hat{x}(s)| \mathrm{d}s, s \in [t,T]$$

式中 c 是某个正常数。

因此必须 $\hat{x}(s)=0 \quad \forall s\in[t,T]$。由式(2.4.21)得 $\hat{u}(s)=v(s)-u(s)=0 \quad \forall s\in[t,T]$。这就证明了最优控制的唯一性。　　证毕

定理2.5(b)中的式(2.4.10)是协态过程 $\psi(t)$ 与动态规划法中的泛函指示的最优值函数 $V(t,x)$ 之间的关系，它的意思是最优值函数 $V(t,x)$ 沿着最优轨道的梯度向量 $D_xV(t,y(t))$ 是协态过程 $\psi(t)$。

§2.5 Hamilton—Jacobi—Bellman 偏微分方程解的结构

本节考虑的最优控制问题仍是式(2.4.1)—式(2.4.2)—式(2.4.3)。下面将要讨论最优值函数 $V(t,x)$ 的性质。

假定对每一 $u(\cdot)\in U_{ad}$，微分方程(2.4.1)对任一初值 $y(0)=x\in R^n$ 都存在唯一解，记为 $y_x(s)$，$s\in[t,T]$。$y_x(s)$ 表示解依赖于初值 x。当然还要假定对任一 $u(\cdot)\in U_{ad}$，性能指标(2.4.2)中的积分存在。只要对函数 g 和 f 适当加一些条件，就能保证上述假定实现。

引理2.7　对任一 $s\in(t,T)$，式(2.4.3)的最优值函数 $V(t,x)$ 满足方程

$$V(t,x) = \inf_{u(\cdot)\in U_{ad}}\left\{\int_t^s f(y_x(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau + V(s,y_x(s))\right\} \tag{2.5.1}$$

证 对任给 $\varepsilon>0$，存在 $u_\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$V(t,x)\leqslant V(t,x,u_\varepsilon(\cdot))<V(t,x)+\varepsilon$$

记 $y_x(\cdot)$ 是相应于容许控制 $u_\varepsilon(\cdot)$ 的微分方程(2.4.1)的解。令

$$\bar{y}(\tau)=y_x(t+\tau)$$

于是 $\bar{y}(\tau)$ 是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\tau}=g(\bar{y}(\tau),u_\varepsilon(\tau)),s<\tau\leqslant T$$

$$\bar{y}(s)=y_x(s)$$

的解。

依微分方程的解的唯一性和 $V(t,x)$ 的定义，得

$$\begin{aligned}
V(t,x,u_\varepsilon(\cdot))&=\int_t^T f(y_x(s),u_\varepsilon(s))\mathrm{d}s+h(y_x(T))\\
&=\int_t^s f(y_x(\tau),u_\varepsilon(\tau))\mathrm{d}\tau+\int_s^T f(y_x(\tau),u_\varepsilon(\tau))\mathrm{d}\tau+h(y_x(T))\\
&=\int_t^s f(y_x(\tau),u_\varepsilon(\tau))\mathrm{d}\tau+\int_s^T f(\bar{y}_{y_x(s)}(\tau),u_\varepsilon(\tau))\mathrm{d}\tau\\
&\quad+h(\bar{y}_{y_x(s)}(T))\\
&\geqslant\int_t^s f(y_x(\tau),u_\varepsilon(\tau))\mathrm{d}\tau+V(s,y_x(s))\\
&\geqslant\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}}\left\{\int_t^s f(y_x(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau+V(s,y_x(s))\right\}
\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，得

$$V(t,x)\geqslant\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}}\left\{\int_t^s f(y_x(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau+V(s,y_x(s))\right\}\tag{2.5.2}$$

现在要证明与不等式(2.5.2)相反的不等式。因此，任给 $\varepsilon>0$，存在 $u_0(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$\begin{aligned}
&\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}}\left\{\int_t^s f(y_x(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau+V(s,y_x(s))\right\}\\
&\geqslant\int_t^s f(y_x^0(\tau),u_0(\tau))\mathrm{d}\tau+V(s,y_x^0(s))-\varepsilon
\end{aligned}\tag{2.5.3}$$

其中 $y_x^0(\cdot)$ 是相应于 $u_0(\cdot)$ 的微分方程(2.4.1)的解。

对上述的 $\varepsilon>0$，存在 $u_1(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$V(s,y_x^0(s))\geqslant V(s,y_x^0(s),u_1(\cdot))-\varepsilon \tag{2.5.4}$$

用 $y^1(\tau)$ 表示微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}\tau}=g(y^1(\tau),u_1(\tau)),s<\tau\leqslant T$$

$$y^1(s)=y_x^0(s)$$

的解。

令

$$u(\tau)=\begin{cases}u_0(\tau),当\ \tau\in[t,s]\\ u_1(\tau),当\ \tau\in(s,T]\end{cases}$$

$$y_x(\tau)=\begin{cases}y_x^0(\tau),当\ \tau\in[t,s]\\ y_x^1(\tau),当\ \tau\in(s,T]\end{cases}$$

用式(2.5.4)得

$$\begin{aligned}&\int_t^s f(y_x^0(\tau),u_0(\tau))\mathrm{d}\tau+V(s,y_x^0(s))\\ &\geqslant\int_t^s f(y_x^0(\tau),u_0(\tau))\mathrm{d}\tau+\int_s^T f(y_x^1(\tau),u_1(\tau))\mathrm{d}\tau\\ &+h(y^1_{y_x^0(s)}(T))-\varepsilon\\ &=\int_t^T f(y_x(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau+h(y_x(T))-\varepsilon\\ &\geqslant V(t,x)-\varepsilon\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

由式(2.5.3)和式(2.5.5)得

$$\begin{aligned}&\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}}\left\{\int_t^s f(y_x(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau+V(s,y_x(s))\right\}\\ &\geqslant V(t,x)-2\varepsilon\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，从式(2.5.6)和(2.5.2)得式(2.5.1)。这就证明了引理。 证毕

为了讨论 HJB 偏微分方程的解的结构，我们作如下的假定：

(G_1) $g(\cdot,\cdot):R^n\times R^r\to R^n$ 连续可微，g_x 有界和存在正常数 $\bar{g}$，满足条件

$$|g(x,u)|\leqslant\bar{g}(1+|x|+|u|)$$

(F_1) $f(\cdot,\cdot):R^n\times R^m\to R^1$ 连续可微。

$$|f(x,u)|\leqslant f_1(1+|x|^2+|u|^2)$$

$$f(x,u)\geqslant f_0|u|^2-c_1$$

$$|f_x|,|f_u|\leqslant f_2(1+|x|+|u|)$$

其中 f_0,f_1,f_2 和 c_1 都是正常数。

(H_1) $h(\cdot):R^n\to R^1$ 连续可微

$$|h(x)|\leqslant h_1(1+|x|^2)$$

$$|h_x(x)|\leqslant h_2(1+|x|)$$

$$h(x)\geqslant -h_0$$

其中 h_0,h_1 和 h_2 都是正常数。

在这一节的下面假定 U 是 R^m 中的有界集。

定理 2.6 设 g、f 和 h 满足条件 (G_1)、(F_1) 和 (H_1)，则最优值函数 $V(t,x)$ 具有下面的性质

(1) 对几乎一切 x，$D_xV(t,x)$ 存在，对几乎一切 t，$D_tV(t,x)$ 存在。

(2) $|V(t,x)|\leqslant c(1+|x|^2)$

$|D_xV(t,x)|\leqslant c(1+|x|)$

$|D_tV(t,x)|\leqslant c(1+|x|^2)$

其中，$c>0$ 表示具有不同值的常数。

证 设 $\bar u\in U$ 固定，取控制 $u(s)=\bar u$。用 $\bar x(s)$ 表示微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\bar x}{\mathrm{d}s}=g(\bar x(s),\bar u),s\in(t,T]\qquad(2.5.7)$$

$$\bar x(t)=x$$

的解。

依定义有

$$V(t,x)\leqslant V(t,x,\bar u)=\int_t^T f(\bar x(s),\bar u)\mathrm{d}s+h(\bar x(T))$$

从微分方程(2.5.7)和假定 (G_1)，有

$$|\bar x(s)|\leqslant|x|+\int_t^T|g(\bar x(s),\bar u)|\mathrm{d}s$$

$$\leqslant|x|+\bar g(T+T|\bar u|+\int_t^T|\bar x(s)|\mathrm{d}s)$$

用 Gronwall's 不等式得估计式

$$|\bar{x}(s)| \leqslant c(1+|x|) \tag{2.5.8}$$

用估计式(2.5.8)、条件(F_1)和(H_1)，得

$$\begin{aligned} V(t,x,\bar{u}) &\leqslant f_1(T+\int_0^T |\bar{x}(s)|^2 ds + T|\bar{u}|^2) \\ &\quad + h_1(1+|\bar{x}(T)|) \\ &\leqslant c(1+|x|^2) \end{aligned}$$

因此

$$V(t,x) \leqslant c(1+|x|^2) \tag{2.5.9}$$

用函数$V(t,x)$的定义和条件(F_1)，对任意足够小的$\varepsilon>0$，存在$u(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$-c_1+f_0\int_t^T |u(s)|^2 ds < V(t,x)+\varepsilon$$

所以 $$V(t,x) \geqslant -(C_1+\varepsilon) \geqslant -(C_1+\varepsilon)(1+|x|^2) \tag{2.5.10}$$

从两个估计式(2.5.9)和(2.5.10)得定理的(2)的第一个估计式。

用条件(F_1)和$V(t,x,u(\cdot))$的定义，有下式

$$\begin{aligned} -c_1+f_0\int_t^T |u(s)|^2 ds &\leqslant f_1(T+\int_t^T |x(s)|^2 ds \\ &\quad + \int_t^T |u(s)|^2 ds) + h_1(1+|x(T)|^2) \end{aligned} \tag{2.5.11}$$

集 U 是有界的，存在正常数 k 使得对 $\forall\, u(\cdot)\in U_{ad}$，$\int_0^T |u(\tau)|^2 d\tau \leqslant k$

从方程

$$x(s) = x + \int_t^s g(x(\tau),u(\tau)) d\tau$$

和条件(G_1)，得

$$\begin{aligned} |x(s)| &\leqslant |x| + \bar{g}(1+\int_t^s |x(\tau)| d\tau + \int_t^s |u(\tau)| d\tau) \\ &\leqslant c'(1+|x|) + c\int_t^s |x(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

故

$$|x(s)| \leqslant c(1+|x|)$$

因此,存在正常数 c,对 $\forall\ u(\cdot)\in U_{ad}$,成立

$$f_0\int_t^T |u(s)|^2 \mathrm{d}s \leqslant c(1+|x|^2) \qquad (2.5.12)$$

对 $x,\hat{x}\in R^n$,依式(2.5.12),总可假定 $u(\cdot)$满足

$$\int_t^T |u(s)|^2 \mathrm{d}s \leqslant c(1+|x|^2+|\hat{x}|^2) \qquad (2.5.13)$$

用 $x(s),\hat{x}(s)$表示微分方程(2.4.1)相应于 $u(s)$的分别具有初值 $x(t)=x,\hat{x}(t)=\hat{x}$ 的解。用 g_x 有界的假定,可得

$$\begin{aligned}|\hat{x}(s)-x(s)| &\leqslant |\hat{x}-x|+\int_t^s |g(\hat{x}(\tau),u(\tau))-g(x(\tau),u(\tau))|\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant |\hat{x}-x|+\int_t^s |g_x(\cdot)||x-\hat{x}|\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant |\hat{x}-x|+c\int_t^s |x(\tau)-\hat{x}(\tau)|\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

从这个不等式可得估计式

$$|\hat{x}(s)-x(s)| \leqslant c|\hat{x}-x| \quad \forall\ s\in(t,T] \qquad (2.5.14)$$

依函数 $V(t,x,u(\cdot))$的定义,条件($\boldsymbol{F}_1$)和($\boldsymbol{H}_1$)和估计式(2.5.14),得

$$\begin{aligned}|V(t,x,u(\cdot))-V(t,\hat{x},u(\cdot))| &\leqslant \int_t^T |f(x(\tau),u(\tau)) \\ &\quad - f(\hat{x}(\tau),u(\tau))|\mathrm{d}\tau+|h(x(T))-h(\hat{x}(T))| \\ &\leqslant \int_t^T |f_x(\cdot)||\hat{x}(\tau)-x(\tau)|\mathrm{d}\tau+|h_x(\cdot)||\hat{x}(T)-x(T)| \\ &\leqslant f_2\int_t^T (1+|\hat{x}(\tau)+\theta(x(\tau)-\hat{x}(\tau))|+|u(\tau)|)|\hat{x}(\tau) \\ &\quad - x(\tau)|\mathrm{d}\tau+h_2(1+|\hat{x}(T)+\theta(x(T)-\hat{x}(T))|)|x(T)-\hat{x}(T)| \\ &\leqslant c(1+|x|+|\hat{x}|)|x-\hat{x}|,\theta\in(0,1)\end{aligned}$$

由此可得

$$|V(t,x)-V(t,\hat{x})| \leqslant c(1+|x|+|\hat{x}|)|x-\hat{x}| \qquad (2.5.15)$$

式(2.5.15)表明,最优值函数 $V(t,x)$关于变元 x 绝对连续。因此,对几乎一切 x,存在 $D_xV(t,x)$。对 $D_xV(t,x)$存在的 x,定理的(1)

和(2)的第二个估计式成立。

由引理 5.1,有

$$V(t,x)=\inf\left\{\int_t^{t+h}f(x(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau+V(t+h,x(t+h))\right\}\tag{2.5.16}$$

其中 inf 是对满足不等式(2.5.12)的 $u(\cdot)$取的。

在式(2.5.16)中,取 $u(s)=\bar{u}\in U$ 得

$$V(t,x)\leqslant\int_t^{t+h}f(\bar{x}(\tau),\bar{u})\mathrm{d}\tau+V(t+h,\bar{x}(t+h))\tag{2.5.17}$$

从方程(2.5.7)得

$$|\bar{x}(t+h)-x|\leqslant c|h|(1+|x|)$$

用这个不等式,由式(2.5.15),得

$$\begin{aligned}|V(t+h,\bar{x}(t+h))-V(t+h,x)|&\leqslant c(1+|x|+|\bar{x}(t+h)|)\\&\quad\times|\bar{x}(t+h)-x|\\&\leqslant c|h|(1+|x|^2)\end{aligned}\tag{2.5.18}$$

用条件(F_1)、式(2.5.12)和式(2.5.18),从式(2.5.17)得

$$V(t,x)\leqslant c|h|(1+|x|^2)+V(t+h,x)\tag{2.5.19}$$

从函数 $V(t,x)$的定义知,$V(t,x)$对变量 t 绝对连续。因此,对 t 几乎处处存在 $D_tV(t,x)$。于是从式(2.5.19)得

$$D_tV(t,x)\geqslant-c(1+|x|^2)\tag{2.5.20}$$

对于满足(2.5.12)的 $u(\cdot)$,用式(2.5.18)和条件(G_1)得

$$\begin{aligned}&|V(t+h,x(t+h))-V(t+h,x)|\\&\leqslant c(1+|x|)|x(t+h)-x|\\&\leqslant c(1+|x|)\int_t^{t+h}|g(x(\tau),u(\tau))|\mathrm{d}\tau\\&\leqslant c(1+|x|)h+c(1+|x|)\int_t^{t+h}|u(s)|\mathrm{d}s\end{aligned}$$

于是

$$V(t,x)=\inf\left\{\int_t^{t+h}f(x(s),u(s))\mathrm{d}s+V(t+h,x(t+h))\right\}$$

$$\geqslant \inf\{f_0\int_t^{t+h}|u(s)|^2 ds - c_1 h + V(t+h,x)$$

$$- ch(1+|x|) - c(1+|x|)\int_t^{t+h}|u(s)|ds\}$$

(2.5.21)

用简单的不等式：$a\geqslant 0, b\geqslant 0, \Rightarrow 2ab\leqslant \varepsilon h a^2 + (\varepsilon h)^{-1}b^2$。取 $a = 1+|x|, b=\int_t^{t+h}|u(s)|ds \Rightarrow b^2\leqslant h\int_t^{t+h}|u(s)|^2 ds$。这就得到

$$(1+|x|)\int_t^{t+h}|u(s)|ds \leqslant \varepsilon h(1+|x|)^2 + \varepsilon^{-1}\int_t^{t+h}|u(s)|^2 ds$$

取 $\varepsilon>0$ 使得 $f_0 - \varepsilon^{-1}c = \varepsilon_1 > 0$。由式(2.5.21)得

$$V(t,x)\geqslant V(t+h,x) - ch(1+|x|^2)$$

由此得到

$$D_t V(t,x)\leqslant c(1+|x|^2) \qquad (2.5.22)$$

从不等式(2.5.20)和(2.5.22)得定理的(2)的第三个估计式。

证毕

现在考虑 HJB 偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \inf_{u\in U}\{f(x,u) + D_x V(t,x)\cdot g(x,u)\} = 0$$

(2.5.23)

$$V(T,x) = h(x)$$

定理 2.7 在假定(G_1)、(F_1)和(H_1)之下，用(2.4.3)定义的最优值函数 $V(t,x)$满足 HJB 偏微分方程(2.5.23)。这个最优值函数 $V(t,x)$是具有定理 2.6 中的性质(2)的满足偏微分方程(2.5.23)的最大解。

证 让 $\bar{u}\in U$ 固定，$\bar{x}(s)$是相应于 $u(s)=\bar{u}$ 的微分方程(2.4.1)的解，$x(s)$是相应于 $u(\cdot)\in U_{ad}$的微分方程(2.4.1)的解。限制容许控制 $u(\cdot)\in U_{ad}$满足条件：

$$\int_t^{t+h} f(x(s),u(s))ds + V(t+h,x(t+h))$$

$$\leqslant \int_t^{t+h} f(\bar{x}(s),\bar{u})ds + V(t+h,\bar{x}(t+h))$$

用定理 2.6 的(2)和式(2.5.15),得

$$|V(t+h,x(t+h))-V(t,x)|\leqslant|V(t+h,x(t+h))$$
$$-V(t,x(t+h))|+|V(t,x(t+h))-V(t,x)|$$
$$\leqslant ch(1+|x(t+h)|^2)+c|x(t+h)-x|(1+|x|$$
$$+|x(t+h)|)|V(t+h,\bar{x}(t+h))-V(t,x)|$$
$$\leqslant ch(1+|x|^2)$$

用条件(F_1)和上面的不等式,得

$$f_0\int_t^{t+h}|u(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant ch(1+|x|^2)+ch|x(t+h)|^2$$
$$+c|x(t+h)-x|(1+|x|+|x(t+h)|) \tag{2.5.24}$$

从方程

$$x(s)=x+\int_t^s g(x(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau$$

得

$$|x(s)|\leqslant|x|+\bar{g}\int_t^s(1+|x(\tau)|+|u(\tau)|)\mathrm{d}\tau$$
$$\leqslant c\{|x|+\int_t^s|u(\tau)|\mathrm{d}\tau+\int_t^s\int_t^\tau(|x|+|u(\alpha)|)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\tau\}$$

所以

$$\sup_{t\leqslant s\leqslant t+h}|x(s)|\leqslant c\{|x|+\int_t^{t+h}|u(\tau)|\mathrm{d}\tau\}$$
$$\leqslant c\{|x|+h^{1/2}(\int_t^{t+h}|u(\tau)|^2\mathrm{d}\tau)^{1/2}$$
$$|x(t+h)-x|\leqslant\int_t^{t+h}|g(x(\tau),u(\tau))|\mathrm{d}\tau$$
$$\leqslant\bar{g}\int_t^{t+h}(1+|x(\tau)|+|u(\tau)|)\mathrm{d}\tau$$
$$\leqslant ch(1+|x|)+h^{1/2}(\int_t^{t+h}|u(\tau)|^2\mathrm{d}\tau)^{1/2}$$
$$+\bar{g}\int_t^{t+h}|u(\tau)|\mathrm{d}\tau$$

用上面的不等式,由式(2.5.24),得

$$\int_0 \int_t^{t+h} |u(\tau)|^2 d\tau \leqslant ch(1 + |x|^2)$$

$$+ ch^{1/2}\int_t^{t+h} |u(\tau)|^2 d\tau + c(1 + |x|)\int_t^{t+h} |u(\tau)| d\tau$$

上面的不等式表明，当 $h>0$ 适当小时，控制 $u(\cdot)$ 具有性质：

$$\int_t^{t+h} |u(s)|^2 ds \leqslant ch(1 + |x|^2) \tag{2.5.25}$$

当 $u(\cdot)$ 满足不等式(2.5.25)时，有

$$|x(t+h) - x| \leqslant h(1 + |x|)c \tag{2.5.26}$$

其中 c 是不依赖于控制类(2.5.25)中的控制的常数。

依定理 2.6，最优控制函数 $V(t,x)$ 在可微点，成立下式

$$\begin{aligned}&|V(t+h, x(t+h)) - V(t,x) - hD_tV(t,x)\\&\quad - \int_t^{t+h} D_xV \cdot g(x(s), u(s)) ds|\\&\leqslant ho(h)\end{aligned}$$

这里 $o(h)/h \to 0 \quad (h \downarrow 0)$

由引理 2.7 和上面的不等式，得

$$D_tV + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \{f(x(s), u) + D_xV(t,x) \cdot g(x(t+h), u)\} ds$$
$$\leqslant o(h), \forall u \in U$$

令 $h \downarrow 0$，由上式得

$$D_tV + \inf_{u \in U}\{f(x,u) + D_xV(t,x) \cdot g(x,u)\} \leqslant 0 \tag{2.5.27}$$

另一方面，由引理 2.7，有下式

$$\begin{aligned}V(t,x) &\leqslant \int_t^{t+h} f(x(s), u) ds + V(t+h, x(t+h))\\&= f(x,u)h + D_tVh + D_xV \cdot g(x,u)h\\&\quad + V(t,x) + o(h)\end{aligned}$$

在上面的不等式两端用 $h>0$ 除后，令 $h \downarrow 0$ 得

$$D_tV + f(x,u) + D_xV \cdot g(x,u) \geqslant 0, \forall u \in U$$

对 $u \in U$ 取 inf，得

$$\inf_{U}\{f(x,u)+D_xV\cdot g(x,u)\}+D_tV\geq 0$$

(2.5.28)

不等式(2.5.27)和(2.5.28)证明了最优值函数$V(t,x)$是HJB偏微分方程(2.5.23)的解。

现在要证明：最优值函数$V(t,x)$是定理2.6中具有性质(2)的函数类中满足HJB偏微分方程(2.5.23)的最大解。所谓最大解，是指：如果$W(t,x)$满足HJB偏微分方程(2.5.23)和具有定理2.6中的性质(2)的三个估计式，则$W\leq V$。

对任一有界容许控制$u(\cdot)\in U_{ad}$，有自然数m，使得$|u(s)|\leq m$。

约定

$$\hat{V}(t,x)=\int_t^T f(x(s),u(s))\mathrm{d}s+h(x(T))$$

则$\hat{V}(t,x)$具有定理2.6中的(2)的三个估计式的性质，并且满足偏微分方程

$$D_t\hat{V}+D_x\hat{V}\cdot g(x,u(t))+f(x,u(t))=0,a.e.\ t,x$$

(2.5.29)

$$\hat{V}(T,x)=h(x)$$

令

$$V_1(t,x)=W(t,x)-\hat{V}(t,x)$$

从HJB偏微分方程(2.5.23)和(2.5.29)，有

$$D_tV_1+D_xV_1\cdot g(x,u(t))\geq 0 \qquad (2.5.30)$$

$$V_1(T,x)=0$$

函数V和$\hat{V}$都具有定理2.6中的(2)的三个估计式的性质。只是对V_1的这三个估计式中的常数依赖于m。

引入权函数$\sigma_\alpha(x)$如下：

$$\sigma_\alpha(x)=\frac{1}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}\quad(\alpha>n)$$

用函数$V_1^+\sigma_\alpha^2$乘方程(2.5.30)两端，得

$$D_t(V_1^+)^2\sigma_\alpha^2+\sigma_\alpha^2D_x(V_1^+)^2\cdot g(x,u(t))\geq 0 \qquad (2.5.31)$$

其中

$$V_1^+(t,x) = \begin{cases} V(t,x), & \text{当 } V(t,x) \geqslant 0 \\ 0, & \text{当 } V(t,x) < 0 \end{cases}$$

对不等式(2.5.31)两端在 R^n 上积分，用分部积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(V_1^+)\|_\sigma^2 - \int_{R^n}(V_1^+)^2\Big\{\sum_{i=1}^n D_{x_i}g(x,u(t))$$

$$+ 2\frac{g(x,u(t))\cdot x}{1+|x|^2}\Big\}\sigma_\alpha^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

其中

$$\|V_1^+\|_\sigma^2 = \int_{R^n}(V_1^+)^2\sigma_\alpha^2\mathrm{d}x$$

从上面的不等式得估计式

$$\|V_1^+(t)\|_\sigma^2 \leqslant c\int_t^T\|V_1^+(s)\|_\sigma^2\mathrm{d}s$$

由此可得

$$V_1^+(t,x) = 0, \forall\ t \leqslant T, x \in R^n$$

这等价于 $W(t,x)\leqslant \bar{V}(t,x)$。这就对有界控制定义的 $\bar{V}(t,x)$ 证明了

$$W(t,x)\leqslant \bar{V}(t,x) \tag{2.5.32}$$

对任给 $\varepsilon>0$，存在容许控制 $u_\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$V(t,x,u_\varepsilon(\cdot)) < V(t,x) + \varepsilon$$

对 $u_\varepsilon(\cdot)$，存在 $u_\varepsilon^m(\cdot)\in U_{ad}\cap\{u(\cdot)\mid |u(\cdot)|\leqslant m\}$，使得

$$u_\varepsilon^m(s) \to u_\varepsilon(s) \quad (m\to\infty), a.e.\ s\in[t,T]$$

由此可得

$$V(t,x,u_\varepsilon^m(\cdot)) \to V(t,x,u_\varepsilon(\cdot)) \quad (m\to\infty)$$

因此，对任一 $u(\cdot)\in U_{ad}$，用 $u(\cdot)$ 定义的 $\bar{V}(t,x)$ 也成立不等式(2.5.32)。即

$$W(t,x) \leqslant \int_t^T f(x(s),u(s))\mathrm{d}s + h(x(T)), \forall\ u(\cdot)\in U_{ad}$$

由此得

$$W(t,x) \leqslant V(t,x)$$

这就证明了具有定理 2.6 的(2)的三个估计式而又是 HJB 偏微分

方程(2.5.23)的解的函数类中，最优值函数是最大解。

§2.6 Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程解的存在唯一性

在本章§2.5中，可以看到在定理2.6中具有性质(2)的三个估计式的函数类中，HJB 偏微分方程的解，可能不是唯一的。在这一节，我们要在一个较上述的函数类小的函数类中来讨论 HJB 偏微分方程的解的存在性和唯一性问题。

为了便于讨论问题，在这一节中我们作如下假定：

(F_2) 设 $f(x,u)$ 对变元 (x,u) 是 C^2 类函数，并且它的二阶偏导数的矩阵是正定矩阵，即存在与 (x,u) 无关的正常数 α_0，使得

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x,u) & f_{xu}(x,u) \\ f_{ux}(x,u) & f_{uu}(x,u) \end{pmatrix} \geqslant \alpha_0 I \quad \forall\ (x,u) \in R^n \times R^r$$

I 是空间 $R^n \times R^r$ 中的单位矩阵。

(G_2) 设 $g(x,u)$ 是关于 (x,u) 的 C^2 类函数，$g(x,u)$ 的所有二阶偏导数以 $c_0/(1+|x|)$ 为界，c_0 是相对于 α_0 很小的正数。

(H_2) 设 $h(x)$ 的二阶偏导数的矩阵 $h_{xx}(x)$ 是非负定，$h_{xx} \geqslant 0$

在这一节设 $U = R^r$

定理 2.8 在定理2.6的条件下，再设 (F_2)、(G_2) 和 (H_2) 成立。如果 HJB 偏微分方程(2.5.23)在具有定理2.6的性质(2)的三个估计式的函数类中的解 $V(t,x)$ 有二阶连续偏导数，则有下面的先验估计

$$0 \leqslant D_x^2 V \leqslant MI \tag{2.6.1}$$

$$|D_x D_t V| \leqslant c(1 + |x|) \tag{2.6.2}$$

$$|D_t^2 V| \leqslant c(1 + |x|^2) \tag{2.6.3}$$

式(2.6.1)中的 $D_x^2 V$ 是矩阵，I 是 R^n 中的单位矩阵。

具有定理2.6的性质(2)的三个估计式和式(2.6.1)、(2.6.2)和(2.6.3)的性质的 HJB 偏微分方程(2.5.23)的解是唯一的，并且对控制问题(2.4.1)—(2.4.2)对所有的 (t,x) 存在唯一的最优

控制。

证 令

$$H(x,\psi,u)=f(x,u)+\psi\cdot g(x,u)$$

记
$$H(t,x,u)=H(x,D_xV(t,x),u)$$

让函数 $\hat{u}(t,x)$ 满足关系式

$$H(x,D_xV(t,x),\hat{u}(t,x))=\min_{u\in R^r}H(x,D_xV(t,x),u)$$

用条件(F_2)、(G_2)和定理 2.6 中的性质(2)的第二个估计式，和函数 $H(x,\psi,u)$ 的二阶偏导数 H_{xx}、H_{xu}、H_{ux} 以及 H_{uu} 中把变元 ψ 用 $D_xV(t,x)$ 代入后，得

$$\begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{pmatrix}(t,x,u)\geqslant(\alpha_0-c_0c)I$$

其中 $c>0$ 是定理 2.6 的性质(2)的第二个估计式的常数。

如果 c_0 适当小，使得 $\alpha_1=(\alpha_0-c_0c)>0$，则矩阵

$$\begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{pmatrix}(t,x,u)\geqslant\alpha_1I$$

是正定阵。因此，H_{uu} 也是正定矩阵。

从 $\hat{u}(t,x)$ 的定义，$\hat{u}(t,x)$ 满足方程

$$H_u(t,x,\hat{u})=0$$

用定理的条件，$H_u(t,x,u)$ 关于 (t,x,u) 是 C^1 类函数。用隐函数定理，$\hat{u}(t,x)$ 关于 (t,x) 是 C^1 类函数。

用 $y(s)$ 表示微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=g(y,\hat{u}(s,y)),s\in(t,T]$$
$$y(t)=x$$

的解。

令

$$\bar{u}(s)=\hat{u}(s,y(s)) \tag{2.6.4}$$
$$\psi(s)=D_xV(s,y(s)) \tag{2.6.5}$$

用函数 $V(t,x)$ 的正则性的假设，对 $\psi(s)$ 求导数得

$$\dot{\psi}(s)=D_tD_xV(s,y(s))+D_x^2V(s,y(s))\cdot g(y(s),\bar{u}(s)) \tag{2.6.6}$$

对 HJB 偏微分方程(2.5.23)两端关于 x 求偏导数，用条件 $H_u(s,x,\bar{u}(s,x))=0$，得

$$D_t D_x V(s,x) + f_x(y,\bar{u}) + D_x^2 V \cdot g(y,\bar{u}) + D_x V \cdot g_x(y,\bar{u}) = 0 \qquad (2.6.7)$$

从方程(2.6.6)与(2.6.7)消去 $D_x^2 V \cdot g + D_t D_x V$ 项，用式(2.6.5)，得

$$-\dot{\psi}(s) = \psi(s) \cdot g_x(y(s),\bar{u}(s)) + f_x(y(s),\bar{u}(s)) \qquad (2.6.8)$$

$$\psi(T) = h_x(y(T))$$

这就是 Pontryagin 最大值原理的协态过程满足的微分方程。

由式(2.6.5)，有

$$\psi(t) = D_x V(t,x) \qquad (2.6.9)$$

为了强调 $y(s)$，$\psi(s)$，$\bar{u}(s)$对初始时间 t 和初始值 x 的依赖，记为 $y(s,x,t)$，$\psi(s,x,t)$，$\bar{u}(s,x,t)$和 $\bar{u}(t)=\hat{u}(t,x)=\bar{u}(t,x,t)$

依$(y(s),\bar{u}(s))$的定义和式(2.6.8)，有

$$\dot{y}(s) = g(y(s),\bar{u}(s)) \qquad (2.6.10)$$

$$y(t) = x$$

$$-\dot{\psi}(s) = H_x(y(s),\psi(s),\bar{u}(s)) \qquad (2.6.11)$$

$$\psi(T) = h_x(y(T))$$

$$H_u(y(s),\psi(s),\bar{u}(s)) = 0 \qquad (2.6.12)$$

令

$$y_1(s) = y_x(s,x,t)x_1$$

$$\psi_1(s) = \psi_x(s,x,t)x_1$$

$$u_1(s) = \bar{u}_x(s,x,t)x_1$$

这里用了常微分方程的解 $y(s,x,t)$，$\psi(s,x,t)$对初始值 x 的可微性，所以 y_x，ψ_x 有意义，$\bar{u}_x$ 用了 $\hat{u}$ 的正则性。由方程(2.6.10)，(2.6.11)和(2.6.12)两端对 x 求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}s} = g_x y_1 + g_u u_1 \qquad (2.6.13)$$

$$y_1(t) = x_1$$

$$-\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}s} = \psi_1 g_x + H_{xx} y_1 + H_{xu} u_1 \qquad (2.6.14)$$

$$\psi(T) = h_{xx}(y(T))y_1(T)$$

$$H_{xx}y_1 + H_{xu}u_1 + \psi_1 g_u = 0 \qquad (2.6.15)$$

尤其是

$$\psi_1(t) = \psi_x(t,x,t)x_1 = D_x^2V(t,x)x_1 \qquad (2.6.16)$$

$$u_1(t) = \bar{u}_x(t,x)x_1 \qquad (2.6.17)$$

现在考虑一个线性系统具有二次性能指标的最优控制问题：

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}s} = g_x y_1 + g_u u_1 \qquad (2.6.18)$$

$$y_1(t) = x_1$$

$$V_1(t,x_1,u_1(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_t^T (H_{xx}y_1y_1 + 2H_{xu}u_1y_1 + H_{uu}u_1u_1)\mathrm{d}s$$

$$+ \frac{1}{2}h_{xx}(y(T))y_1(T)y_1(T) \qquad (2.6.19)$$

由 H 的定义，有下列各式

$$H_{xx}(y(s),\psi(s),\bar{u}(s)) = f_{xx}(y(s),\bar{u}(s)) + \psi(s)\cdot g_{xx}(y(s),\bar{u}(s))$$

$$H_{xu}(y(s),\psi(s),\bar{u}(s)) = f_{xu}(y(s),\bar{u}(s)) + \psi(s)\cdot g_{xu}(y(s),\bar{u}(s))$$

$$H_{uu}(y(s),\psi(s),\bar{u}(s)) = f_{uu}(y(s),\bar{u}(s)) + \psi(s)\cdot g_{uu}(y(s),\bar{u}(s))$$

如前面所述，有

$$\begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{pmatrix}(y(s),\psi(s),\bar{u}(s)) \geqslant \alpha_1 I$$

由此矩阵的正定性和(H_3)条件已知，最优控制问题(2.6.18)—(2.6.19)是一个凸的二次性能指标的控制问题。因此，式(2.6.13)、(2.6.14)和(2.6.15)是使得 $u_1(\cdot)$是控制问题(2.6.18)—(2.6.19)的最优控制的必要充分条件。

从上面的讨论，有下式

$$V_1(t,x_1,u_1(\cdot)) \geqslant 0 \qquad (2.6.20)$$

$$V_1(t,x_1,u_1(\cdot)) \leqslant V_1(t,x_1,0) \leqslant M_1|x_1|^2 \qquad (2.6.21)$$

其中 $M_1>0$ 是常数。

从微分方程(2.6.13)和(2.6.14)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(y_1(s)\cdot\psi_1(s)) = (g_xy_1 + g_uu_1)\cdot\psi_1 - y_1(\psi_1\cdot g_x + H_{xx}y_1 + H_{xu}u_1)$$

$$= -(H_{xx}y_1y_1 + 2H_{xu}u_1y_1 + H_{uu}u_1u_1)$$

对上面的恒等式两端从 t 到 T 积分，用式(2.6.16)和式(2.6.14)的终端条件，得

$$\int_t^T (H_{xx}y_1y_1 + 2H_{xu}u_1y_1 + H_{uu}u_1u_1)\mathrm{d}s$$

$$= y_1(t)\cdot\psi_1(t) - y_1(T)\cdot\psi_1(T)$$

$$= D_x^2V(t,x)x_1x_1 - h_{xx}(y(T))y_1(T)y_1(T)$$

由此得

$$2V_1(t,x_1,u_1(\cdot)) = D_x^2V(t,x)x_1x_1$$

由式(2.6.20)和式(2.6.21)，得

$$0 \leqslant D_x^2V(t,x) \leqslant M_1I \tag{2.6.22}$$

令 $s=t$，将式(2.6.16)和式(2.6.17)代入式(2.6.15)，得

$$H_{ux}x_1 + H_{uu}\hat{u}_xx_1 + g_u'D_x^2Vx_1 = 0$$

矩阵 H_{uu} 的逆矩阵 H_{uu}^{-1} 存在，由上式解出

$$\hat{u}_x(t,x)x_1 = -H_{uu}^{-1}(H_{ux}x_1 + g_u'D_x^2Vx_1)$$

由估计式(2.6.22)和上面的等式得估计式

$$|\hat{u}_x(t,x)| \leqslant c_1 \tag{2.6.23}$$

这里 $c_1>0$ 是常数。

依假定 $V(t,x)$ 是 HJB 偏微分方程(2.5.23)的解和 $\hat{u}(t,x)$ 的定义，得下面的方程

$$D_tV + H(x,D_xV,\hat{u}) = 0$$

从这个方程得到关系式

$$D_xD_tV + H_x(x,D_xV,\bar{u}) + (D_x^2V)g = 0 \tag{2.6.24}$$

$$D_t^2V + (D_xD_tV)g(x,\hat{u}) = 0 \tag{2.6.25}$$

用 D_xV 的估计式，从上面两式(2.6.24)和(2.6.25)，得

$$|D_xD_tV| \leqslant c(1 + |x|) \tag{2.6.26}$$

$$|D_t^2V| \leqslant c(1 + |x|^2) \tag{2.6.27}$$

这就证明了定理的估计式(2.6.2)和(2.6.3)。

从 $\hat{u}$ 的定义，$\hat{u}$ 满足方程

$$H_u(x, D_x V, \hat{u}) = 0$$

两端对 t 求导数，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H_u(x, D_x V, \hat{u}(t,x)) = H_{uu}\hat{u}_t + g_u^T D_x D_t V = 0$$

由这一等式和估计式(2.6.26)，得

$$|\hat{u}_t| \leqslant c(1 + |x|)$$

函数 $V(t,x)$ 是 HJB 偏微分方程(2.5.23)的解，于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} V(s, y(s)) = D_s V + D_x V \cdot \dot{y}(y(s), \bar{u}(s))$$

$$= - f(y(s), \bar{u}(s))$$

对上式两端从 t 到 T 积分，得

$$V(t,x) = V(t,x,\bar{u}(\cdot))$$

因此得

$$V(t,x) \geqslant \inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} V(t,x,u(\cdot))$$

另一方面，依定理 2.7，作为 (t,x) 的函数

$$\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} V(t,x,u(\cdot))$$

是 HJB 偏微分方程(2.5.23)的最大解，即

$$\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} V(t,x,u(\cdot)) \geqslant V(t,x)$$

因此必须

$$V(t,x) = \inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} V(t,x,u(\cdot))$$

这表明 $V(t,x)$ 是 HJB 偏微分方程(2.5.23)的最大解，所以 $V(t,x)$ 是唯一的。

由矩阵

$$\begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{pmatrix}(y(s), \psi(s), \bar{u}(s)) \geqslant \alpha I$$

的正定性，依定理 2.5，最优控制 $\bar{u}(s)$；$s\in(t,T]$ 是唯一的。　证毕

定理 2.9　假定函数 g, f, h 关于变元 (x,u) 是 C^2 类函数，g 的偏导数有界，f 和 h 的二阶偏导数有界和条件 (F_2)，(G_2)，(H_2) 及 $h \geqslant -c$ 成立，则存在唯一 $V(t,x) \in C^2$，使得

$$0 \leqslant D_x^2 V \leqslant MI$$
$$|D_x D_t V| \leqslant c(1 + |x|)$$
$$|D_t^2 V| \leqslant c(1 + |x|^2)$$
$$D_t V + \inf_u \{ f(x,u) + D_x V \cdot g(x,u) \} = 0 \qquad (2.6.28)$$
$$V(T,x) = h(x)$$

证 关于 V 的唯一性，定理 2.8 已证。现在证明 V 的存在性。为此目的，考虑方程

$$D_t V_\varepsilon + \inf_u \{ f(x,u) + D_x V_\varepsilon \cdot g(x,u) \} + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta V_\varepsilon = 0$$
$$(2.6.29)$$
$$V_\varepsilon(T,x) = h(x)$$

其中 Δ 是 Laplace 算符。

考虑随机系统的最优控制问题

$$dx_s = g(x_s, u) ds + \varepsilon dw_s \qquad (2.6.30)$$
$$x_t(t) = x \in R^n$$

随机控制系统(2.6.30)的性能指标为

$$V_\varepsilon(t,x,u(\cdot)) = E\{ \int_t^T f(x_t(s), u(s)) ds + h(x_t(T)) \}$$
$$(2.6.31)$$

其中 $w_s, s \in [t,T]$ 是 n 维的 Wiener 过程。

令

$$V_\varepsilon(t,x) = \inf_{u(\cdot)} V_\varepsilon(t,x,u(\cdot))$$

对 $V_\varepsilon(t,x)$ 有估计式

$$|V_\varepsilon| \leqslant c(1 + |x|^2)$$
$$|D_x V_\varepsilon| \leqslant c(1 + |x|)$$

其中正常数 c 与 ε 无关。

存在反馈控制 $\hat{u}_\varepsilon(t,x)$，有估计式

$$|\hat{u}_\varepsilon(t,x)| \leqslant c(1 + |x|)$$

用这个反馈控制可以构造一个控制问题(2.6.30)—(2.6.31)的最优控制 $\bar{u}_\varepsilon(s), s \in [t,T]$。依第四章的结果，可以写出这个最优

控制 $\bar{u}_\epsilon(\cdot)$ 的随机最大值原理，注意到随机系统(2.6.30)的扩散项不依赖于 x 和 u，因此最优性条件为

$$d\bar{y}_\epsilon = g(\bar{y}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon)ds + \epsilon dw_s \tag{2.6.32}$$

$$\bar{y}_\epsilon(t) = x$$

$$-\frac{d\bar{\psi}_\epsilon}{ds} = H_x(\bar{y}_\epsilon, \bar{\psi}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon) \tag{2.6.33}$$

$$\bar{\psi}_\epsilon(T) = h_x(\bar{y}_\epsilon(T))$$

$$H_u(\bar{y}_\epsilon(s), \bar{\psi}_\epsilon(s), \bar{u}_\epsilon(s)) = 0 \tag{2.6.34}$$

$$\bar{u}_\epsilon(t) = \bar{u}_\epsilon(t,x) = \hat{u}_\epsilon(t, \bar{y}_\epsilon(t))$$

$$E(\bar{\psi}_\epsilon(s) \mid \sigma(s)) = D_x V_\epsilon(s, y_\epsilon(s))$$

这里 $\sigma(s) = \sigma(w(\tau) \mid \tau \leqslant s)$ 表示 Wiener 过程 $w(\tau)$ 产生的 σ-域，$E(\cdot \mid \sigma(s))$ 表示对 σ-域 $\sigma(s)$ 的条件期望。

从上式和条件期望的性质有

$$E\bar{\psi}_\epsilon(t) = EE(\bar{\psi}_\epsilon(t) \mid \sigma(t)) = ED_x V_\epsilon(t,x)$$
$$= D_x V_\epsilon(t,x)$$

为了计算 $D_x^2 V_\epsilon$，对式(2.6.32)、(2.6.33)和式(2.6.34)关于 x 求偏导数，得

$$\frac{d\bar{y}_{\epsilon,1}}{ds} = g_x \bar{y}_{\epsilon,1} + g_u \bar{u}_{\epsilon,1} \tag{2.6.35}$$

$$\bar{y}_{\epsilon,1}(t) = x_1$$

$$-\frac{d\bar{\psi}_{\epsilon,1}}{ds} = H_{xx}\bar{y}_{\epsilon,1} + H_{xu}\bar{u}_{\epsilon,1} - g_x^t \bar{\psi}_{\epsilon,1} \tag{2.6.36}$$

$$\psi_{\epsilon,1}(T) = h_{xx}(\bar{y}_{\epsilon,1}(T))\bar{y}_{\epsilon,1}(T)$$

$$H_{ux}\bar{y}_{\epsilon,1} + H_{uu}\bar{u}_{\epsilon,1} + g_u^t E(\bar{\psi}_{\epsilon,1} \mid \sigma(s)) = 0 \tag{2.6.37}$$

其中

$$\bar{y}_{\epsilon,1} = \frac{\partial \bar{y}_\epsilon}{\partial x}, \bar{\psi}_{\epsilon,1} = \frac{\partial \bar{\psi}_\epsilon}{\partial x}, \bar{u}_{\epsilon,1} = \frac{\partial \bar{u}_\epsilon}{\partial x}$$

考虑一个具有二次性能指标的线性系统的最优控制问题如下：

$$\frac{d\bar{y}_{\epsilon,1}}{ds} = g_x \bar{y}_{\epsilon,1} + g_u \bar{u}_{\epsilon,1} \tag{2.6.38}$$

$$\bar{y}_{\epsilon,1}(t) = x_1$$

二次性能指标为

$$V_{1,\varepsilon}(t,x_1,\bar{u}_{\varepsilon,1}(\cdot))=\frac{1}{2}E\{\int_t^T(H_{xx}\bar{y}_{\varepsilon,1}\bar{y}_{\varepsilon,1}+2H_{xu}\bar{u}_{\varepsilon,1}\bar{y}_{\varepsilon,1}$$
$$+H_{uu}\bar{u}_{\varepsilon,1}\bar{u}_{\varepsilon,1})\mathrm{d}s+h_{xx}\bar{y}_{\varepsilon,1}(T)y_{\varepsilon,1}(T)\}$$
(2.6.39)

由定理的假设(F_2)、(G_2)、(H_2)和$h\geqslant -c$，在式(2.6.39)中的泛函$V_{1,\varepsilon}(t,x_1,\bar{u}_{\varepsilon,1}(\cdot))$是二次凸泛函。因此，式(2.6.35)，(2.6.36)和式(2.6.37)是使得$\bar{u}_{\varepsilon,1}(\cdot)$是最优控制问题(2.6.38)—(2.6.39)的最优控制的充分必要条件。泛函$V_{1,\varepsilon}(t,x_1,u_{\varepsilon,1}(\cdot))$的最小值为

$$\frac{1}{2}E(\bar{\psi}_{\varepsilon,1}(t)x_1)=\frac{1}{2}D_x^2V_\varepsilon x_1x_1$$

由此得到

$$0\leqslant D_x^2V_\varepsilon\leqslant MI$$

类似于式(2.6.26)和式(2.6.27)之证，可以得到V_ε满足估计式

$$|D_xD_tV_\varepsilon|\leqslant c(1+|x|)$$
$$|D_t^2V_\varepsilon|\leqslant c(1+|x|^2)$$

对于每一个$\varepsilon>0$，拟线性偏微分方程(2.6.29)存在唯一解$V_\varepsilon(t,x)$，并且$\varepsilon\to 0$时，$V_\varepsilon(t,x)\to V(t,x)$。函数$V(t,x)$同$V_\varepsilon(t,x)$一样满足定理的三个估计式。如果$V(t,x)$是式(2.6.28)的解，则定理证毕。

但是$V(t,x)$是否偏微分方程(2.6.28)的解？是什么意义下的解？这将在下一节中讨论。

§2.7 Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程的粘性解

HJB 偏微分方程是一个特殊的非线性程度高的偏微分方程。在通常称为古典解的概念之下，HJB 偏微分方程的解可能不唯一。

在20世纪80年代初期，M. G. Crandall 和 P. L. Lions 提出了一种解的新概念，称为粘性解。在粘性解的概念下，HJB 偏微分方程的解的存在性和唯一性问题容易被解决。粘性解的概念是对于连续函数类中的函数引入的，除此而外，不要求这种解有更多的光滑性。由于在粘性解的意义下，HJB 偏微分方程的解的存在性和唯一性被解决，从而最优控制理论的动态规划方法有了数学理论基础。

在这一节中作如下的假定：

(G_3) 设 $g(\cdot,\cdot):R^n\times R^r\to R^n$ 可测，g_x 存在有界，存在正常数 $\bar{g}$，使得

$$|g(x,u)|\leqslant \bar{g}(1+|x|+|u|)$$

(F_3) 设 $f(\cdot,\cdot):R^n\times R^r\to R^1$ 连续，存在正常数 f_0,f_1 和 f_2，c_0，使得

$$|f(x,u)|\leqslant f_1(1+|x|^2+|u|^2)$$

$$|f(x_1,u)-f(x_2,u)|\leqslant f_2|x_1-x_2|^\alpha(1+|x_1|+|x_2|+|u|)$$

$$f(x,u)\geqslant f_0|u|^2-c_0$$

其中 $0<\alpha\leqslant 1$

(H_3) 设 $h(\cdot):R^n\to R^1$，$h(x)\geqslant -c_1$

$$|h(x)|\leqslant h_1(1+|x|^2)$$

$$|h(x_1)-h(x_2)|\leqslant h_2|x_1-x_2|^\alpha(1+|x_1|+|x_2|)$$

其中 $0<\alpha\leqslant 1$，h_1,h_2 和 c_1 是正常数。

考虑下面的最优控制问题。受控系统为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=g(y(s),u(s)),s\in(t,T] \tag{2.7.1}$$

$$y(t)=x\in R^n$$

受控系统(2.7.1)的性能指标为

$$V(t,x,u(\cdot))=\int_t^T f(y(s),u(s))\mathrm{d}s+h(y(T)) \tag{2.7.2}$$

约定

$$V(t,x)=\inf_{u(\cdot)}V(t,x,u(\cdot)) \tag{2.7.3}$$

引理 2.8 在(G_3)、(F_3)和(H_3)的假定下,最优值函数 $V(t,x)$ 满足估计式

$$|V(t,x)| \leqslant c(1+|x|^2) \tag{2.7.4}$$

$$|V(t,x_1)-V(t,x_2)| \leqslant c|x_1-x_2|^{\alpha}(1+|x_1|+|x_2|) \tag{2.7.5}$$

$$|V(t_1,x)-V(t_2,x)| \leqslant c|t_1-t_2|^{\alpha(2-\alpha)^{-1}}(1+|x|^2) \tag{2.7.6}$$

证 设 $x_1(s)$,$x_2(s)$是微分方程(2.7.1)相应于控制 $u(\cdot)$和初始值分别为 x_1,x_2 的解,如同定理 2.6 的证明,成立

$$|x_1(s)-x_2(s)| \leqslant c|x_1-x_2|, \forall\, s\in[t,T] \tag{2.7.7}$$

如同在定理 2.6 的证明中可以假定 $u(\cdot)$满足

$$\int_t^T |u(s)|^2 ds \leqslant c(1+|x_1|^2+|x_2|^2) \tag{2.7.8}$$

在这个限制之下,用假设(G_3)和(F_3),有

$$\begin{aligned}&|V(t,x_1,u(\cdot))-V(t,x_2,u(\cdot))|\\&\leqslant c|x_1-x_2|^{\alpha}\int_t^T(1+|x_1(s)|+|x_2(s)|+|u(s)|)ds\\&\leqslant c|x_1-x_2|^{\alpha}(1+|x_1|+|x_2|)\end{aligned}$$

由此得

$$|V(t,x_1)-V(t,x_2)| \leqslant c|x_1-x_2|^{\alpha}(1+|x_1|+|x_2|)$$

这就证明了估计式(2.7.5)。

用引理 2.7,函数 $V(t,x)$满足

$$V(t,x)=\inf_{u(\cdot)}\left\{\int_t^{t+h} f(x(s),u(s))ds+V(t+h,x(t+h))\right\} \tag{2.7.9}$$

如定理 2.7 的证明类似,当 $h>0$ 适当小时,在式(2.7.9)中的 inf,可以限制 $u(\cdot)$,使得

$$\int_t^{t+h}|u(s)|^2 ds \leqslant ch^{\alpha(2-\alpha)^{-1}}(1+|x|^2) \tag{2.7.10}$$

相应于满足式(2.7.10)的 $u(\cdot)$的微分方程(2.7.1)的解 $x(s)$,有

$$|u(s)|\leqslant c(1+|x|)$$

由此得

$$|x(t+h)-x|\leqslant ch^{(2-\alpha)^{-1}}(1+|x|) \qquad (2.7.11)$$

从已证的估计式(2.7.5)和(2.7.11)可得

$$\begin{aligned}&|V(t+h,x(t+h))-V(t+h,x)|\\ &\leqslant c|x(t+h)-x|^{\alpha}(1+|x(t+h)|+|x|)\\ &\leqslant ch^{\alpha(2-\alpha)^{-1}}(1+|x|)^{1+\alpha}\end{aligned} \qquad (2.7.12)$$

$$\left|\int_t^{t+h} f(x(s),u(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant ch^{\alpha(2-\alpha)^{-1}}(1+|x|^2) \qquad (2.7.13)$$

由估计式(2.7.12)、(2.7.13)和式(2.7.9)，得

$$|V(t+h,x)-V(t,x)|\leqslant ch^{\alpha(2-\alpha)^{-1}}(1+|x|^2)$$

这就证明了估计式(2.7.6)。 证毕

下面引入 HJB 偏微分方程的粘性解的概念。为此，定义以下几个集合。

用 $C(R_+^1)$ 表示定义在 $[0,\infty)$ 上连续函数全体之集。

设 $\varphi(t,x)$ 是定义在 $[0,T]\times R^n$ 上的连续函数，对固定的 (t,x)，定义点集

$D^+\varphi(t,x)=\{(\lambda,\xi)\mid(\lambda,\xi)\in R^1\times R^n,|\lambda|+|\xi|<\infty$，存在常数 $r_0>0$ 和函数 $\rho(\cdot)\in C(R_+^1)$，$\rho(0)=0$ 使得 $\varphi(s,y)\leqslant\varphi(t,x)+\xi\cdot(y-x)+\lambda(s-t)+\delta\rho(\delta)$，其中 $\delta=|y-x|+|s-t|$，$\forall\, y,s$ 满足 $\delta\leqslant r_0\}$

再定义集 $D^-\varphi(t,x)$ 如下：

$$D^-\varphi(t,x)=-D^+(-\varphi)(t,x)$$

定义点集：

$T_+(\varphi)=\{(t,x)\mid(t,x)\in[0,T]\times R^n$，存在 $(\lambda,\xi)\in R^1\times R^n$，$|\lambda|+|\xi|<\infty$，存在 $r_0>0$ 和函数 $\rho(\cdot)\in C(R_+^1)$，$\rho(0)=0$，使得 $\varphi(s,y)\leqslant\varphi(t,x)+\xi\cdot(y-x)+\lambda(s-t)+\delta\rho(\delta)$，$\delta\leqslant r_0\}$

$T_-(\varphi)=T_+(-\varphi)$

$\mathrm{d}(\varphi)=\{(t,x)\mid(t,x)\in[0,T]\times R^n,\varphi(t,x)$ 在点 (t,x) 处可微$\}$

则 $\mathrm{d}(\varphi)=T_+(\varphi)\cap T_-(\varphi)$

考虑 HJB 偏微分方程

$$D_tV+\inf_u\{f(x,u)+D_xV\cdot g(x,u)\}=0 \qquad (2.7.14)$$

$$V(T,x)=h(x)$$

定义 2.2 设 $V(s,x),(s,x)\in[t,T]\times R^n$ 是连续函数，使得 $V(T,x)=h(x)$。如果对一切 $(\lambda,\xi)\in D^+V(t,x),\forall x\in R^n,t\in[0,T)$ 满足

$$\lambda+\inf_u\{f(x,u)+\xi\cdot g(x,u)\}\geqslant 0 \qquad (2.7.15)$$

称 $V(t,x)$ 是 HJB 偏微分方程(2.7.14)的粘性上解。

如果对一切 $(\lambda,\xi)\in D^-V(t,x),\forall x\in R^n,t\in[0,T)$ 满足

$$\lambda+\inf_u\{f(x,u)+\xi\cdot g(x,u)\}\leqslant 0 \qquad (2.7.16)$$

称 $V(t,x)$ 是 HJB 偏微分方程(2.7.14)的粘性下解。

如果 $V(t,x)$ 既是 HJB 偏微分方程(2.7.14)的粘性上解又是粘性下解，称函数 $V(t,x)$ 是 HJB 偏微分方程(2.7.14)的粘性解。

自然地，如果函数 $V(t,x)$ 是 HJB 偏微分方程(2.7.14)的粘性解，则 $V(t,x)$ 在它的所有可微点满足方程(2.7.14)。

定理 2.10 在 (G_3)、(F_3) 和 (H_3) 的假定下，用式(2.7.3)定义的最优值函数 $V(t,x)$ 是 HJB 偏微分方程(2.7.14)的粘性解。

证 任取一 $\bar{u}\in U$，$\bar{x}(s)$ 是相应于控制 $u(s)=\bar{u}$ 的微分方程(2.7.1)的解。由引理 2.7，对 $t<T$ 和 $h>0,t+h\leqslant T$，有

$$V(t,x)\leqslant\int_t^{t+h}f(\bar{x}(s),\bar{u})\mathrm{d}s+V(t+h,\bar{x}(t+h))$$

对任一 $(\lambda,\xi)\in D^+V(t,x)$，由上面的不等式，有

$$0\leqslant\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\{f(\bar{x}(s),\bar{u})+\xi\cdot g(\bar{x}(s),\bar{u})+\lambda\}\mathrm{d}s$$
$$+\frac{1}{h}\{V(t+h,\bar{x}(t+h))-V(t,x)-\xi\cdot(\bar{x}(t+h)-x)-\lambda h\}$$
$$(2.7.17)$$

如果 $(\lambda,\xi)\in D^+V(t,x)$，由集 $D^+V(t,x)$ 的定义和式(2.7.17)，得

$$0 \leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\{f(\bar{x}(s),\bar{u}) + \xi \cdot g(\bar{x}(s),\bar{u}) + \lambda\}\mathrm{d}s$$

$$+ (1 + h^{-1}|\bar{x}(t+h) - x|)\rho(h + |\bar{x}(t+h) - x|)$$

令 $h \downarrow 0$，由上面不等式，得

$$0 \leqslant f(x,\bar{u}) + \xi \cdot g(x,\bar{u}) + \lambda, \forall\ (\lambda,\xi) \in D^{1,+}V(t,x), \bar{u} \in U$$

这就证明了函数 $V(t,x)$ 是 HJB 偏微分方程(2.7.14)的粘性上解。

定义函数

$$\Psi(s,y) = V(t,x) + \xi \cdot (y - x) + \lambda(s - t)$$

$$-(|y - x| + |s - t|)(1 + \rho(|y - x| + |s - t|)^{-1}$$

$$\times \rho(|y - x| + |s - t|)\gamma_0$$

这里 $(\lambda,\xi) \in D^{1,+}V(t,x)$，$|y-x|+|s-t| \leqslant \gamma_0$

如果 $\gamma_0 = 1 + \sup\limits_{\delta \leqslant r_0}\rho(\delta)$，则

$$V(s,y) \geqslant \Psi(s,y)$$

由引理 2.8 的证明已知，在式(2.7.9)中的 $u(\cdot)$ 可以限制满足式(2.7.10)。此时，式(2.7.11)

$$|x(t+h) - x| \leqslant ch^{(2-\alpha)^{-1}}(1 + |x|)$$

成立。

如果取 $h>0$ 适当小，使得 $ch^{(2-\alpha)^{-1}}(1+|x|)<r_0$，则

$$V(t+h,x(t+h)) \geqslant \Psi(t+h,x(t+h)) \qquad (2.7.18)$$

由式(2.7.9)和式(2.7.18)，得

$$V(t,x) = \Psi(t,x)$$

$$\geqslant \inf_{u(\cdot)}\left\{\int_t^{t+h} f(x(s),u(s))\mathrm{d}s + \Psi(t+h,x(t+h))\right\}$$

$$(2.7.19)$$

由式(2.7.19)和 $\Psi(s,y)$ 的定义，得

$$0 \geqslant \inf_{u(\cdot)}\left\{\int_t^{t+h}(f(x(s),u(s)) + \xi \cdot g(x(s),u(s)) + \lambda)\mathrm{d}s\right\}$$

$$-\gamma_0(1 + \rho(|x(t+h) - x| + h)^{-1}$$

$$\times(|x(t+h)-x|+h)\rho(|x(t+h)-x|+h)) \quad (2.7.20)$$

用 $\rho(\cdot)\in C(R^1_+)$ 和 $\rho(0)=0$，当 $\delta\to 0$ 时，$\rho(\delta)\to 0$。于是任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，当 $h\leqslant\delta(\varepsilon)$ 时，有

$$(1+\rho(|x(t+h)-x|+h))^{-1}(|x(t+h)-x|+h)$$
$$\times\rho(|x(t+h)-x|+h)<\varepsilon h$$

当 $h\leqslant\delta(\varepsilon)$ 时，由式(2.7.20)，有

$$0\geqslant\inf_{u(\cdot)}\{h^{-1}\int_t^{t+h}\{f(x(s),u(s))+\xi\cdot g(x(s),u(s))$$
$$+\lambda\}ds\}-y_0\varepsilon$$

其中 y_0 只与 (t,x) 有关。

由上面的不等式，令 $h\downarrow 0$，得

$$0\geqslant\inf_u\{f(x,u)+\xi\cdot g(x,u)+\lambda\}-y_0\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，成立不等式

$$0\geqslant\inf\{f(x,u)+\xi\cdot g(x,u)+\lambda\}$$
$$\forall\ (\lambda,\xi)\in D^-V(t,x)$$

这就证明了 $V(t,x)$ 是 HJB 偏微分方程(2.7.14)的粘性下解。因此，最优值函数 $V(t,x)$ 是 HJB 偏微分方程(2.7.14)的粘性解。

证毕

引理 2.9 设 $\varphi(\cdot,\cdot):[0,T]\times R^n\to R^1$ 是连续函数。令 $\hat{\varphi}(t,x)=\varphi(t,x)e^{-k(T-t)}$，$k>0$。如果 $(\lambda,\xi)\in D^+\varphi(t,x)$，则 $(\lambda e^{-k(T-t)}-k\hat{\varphi}(t,x),\xi e^{-k(T-t)})\in D^+\hat{\varphi}(t,x)$

如果 $\varphi(t,x)$ 是 HJB 偏微分方程(2.7.14)的粘性解，则 $\hat{\varphi}(t,x)$ 是下面的 HJB 偏微分方程

$$D_t\hat{\varphi}-k\hat{\varphi}+\inf_u\{f(x,u)e^{-k(T-t)}+D_x\hat{\varphi}\cdot g(x,u)\}=0 \quad (2.7.21)$$

的粘性解。

证 设 $(\lambda,\xi)\in D^+\varphi(t,x)$，要证

$$(\lambda e^{-k(T-t)}-k\hat{\varphi}(t,x),\xi e^{-k(T-t)})\in D^+\hat{\varphi}(t,x)$$

这等价于要证

$$\varphi(s,y)e^{-k(T-s)}\leqslant\varphi(t,x)e^{-k(T-t)}+\xi\cdot(y-x)e^{-k(T-t)}$$

$$+(\lambda - k\varphi(t,x))(s-t)e^{-k(T-t)} + \delta_1\rho_1(\delta_1)$$

如要 $\delta_1 = |y-x| + |s-t| \leqslant r_1$

上式又可写为

$$\varphi(s,y) \leqslant \varphi(t,x)e^{k(s-t)} + \xi\cdot(y-x)e^{k(s-t)}$$
$$+ (\lambda - k\varphi(t,x))(s-t)e^{k(s-t)}$$
$$+ \delta_1\rho_1(\delta_1)e^{k(T-s)}.$$
$$\delta_1 = |y-x| + |s-t| \leqslant r_1$$

但是

$$e^{k(s-t)} = 1 - k(s-t) + o(|s-t|)$$

代入上面的式子，得

$$\varphi(s,y) \leqslant \varphi(t,x) + \xi\cdot(y-x) + \lambda(s-t) + \delta\rho(\delta)$$

只要 $\delta = |y-x| + |s-t| \leqslant r_0$

这由假设 $(\lambda,\xi)\in D^+\varphi(t,x)$，上式成立． 证毕

从粘性解的定义和上面已证 $(\lambda,\xi)\in D^+\varphi(t,x) \Rightarrow (\lambda e^{k(T-t)} - k\varphi(t,x), \xi e^{k(T-t)}) \in D^+\bar{\varphi}(t,x)$ 知道，如果 $\varphi(t,x)$ 是 HJB 偏微分方程(2.7.14)的粘性解，则 $\bar{\varphi}(t,x)$ 是 HJB 偏微分方程(2.7.21)的粘性解．

依引理 2.9，要证明 HJB 偏微分方程(2.7.14)的解的唯一性，只需证明 HJB 偏微分方程

$$D_tV - kV + \inf_u\{f(x,u,t) + D_xV\cdot g(x,u)\} = 0 \tag{2.7.22}$$

$$V(T,x) = h(x)$$

的唯一性，其中 $f(x,u,t) = f(x,u)e^{-k(T-t)}$，$k>0$

引理 2.10 假设 $\Phi, V\in C([0,T]\times R^n)$，$\varphi\in C_1([0,T]\times R^n)$，$\varphi$ 在 $[0,T]\times R^n$ 上具有紧支集。如果点 (t_0,x_0) 是函数 $\varphi(\Phi - V)$ 达到正的极大点，φ 和 V 在点 (t_0,x_0) 处可微，则

$$\xi = D_xV(t_0,x_0) - \frac{D_x\varphi}{\varphi}(\Phi - V)(t_0,x_0)$$

$$\lambda = D_tV(t_0,x_0) - \frac{D_t\varphi}{\varphi}(\Phi - V)(t_0,x_0)$$

有 $(\lambda,\xi)\in D^{-}\Phi(t_0,x_0)$。

如果 $\varphi(\Phi-\Psi)$ 在点 (t_0,x_0) 达到负的极小，则 $(\lambda,\xi)\in D^{-}\Phi(t_0,x_0)$。

用 $C_+([0,T]\times R^n)$ 表示定义在 $[0,T]\times R^n$ 上的取正值的连续函数类。

证 由假设 $\varphi\in C_+([0,T]\times R^n)$，必须 $\varphi(t_0,x_0)>0$。存在正数 $r_0>0$，只要 $|x-x_0|+|t-t_0|\leqslant r_0$，就有 $\varphi(t,x)\geqslant a_0>0$，这里 a_0 是不依赖于 (t,x) 的常数。由假设 φ 和 Ψ 在点 (t_0,x_0) 可微，可以修改 r_0，使得

$$
\begin{aligned}
&|\varphi(t,x)-\varphi(t_0,x_0)-D_x\varphi(t_0,x_0)(x-x_0)\\
&\quad -D_t\varphi(t_0,x_0)(t-t_0)|\leqslant\delta\rho_1(\delta)
\end{aligned}
\tag{2.7.23}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\Psi(t,x)-\Psi(t_0,x_0)-D_x\Psi(t_0,x_0)(x-x_0)\\
&\quad -D_t\Psi(t_0,x_0)(t-t_0)|\leqslant\delta\rho_2(\delta)
\end{aligned}
\tag{2.7.24}
$$

只要 (t,x) 满足 $\delta=|x-x_0|+|t-t_0|\leqslant r_0$，$\rho_1(\cdot),\rho_2(\cdot)\in C(R^1_+)$，$\rho_1(0)=\rho_2(0)=0$

由式(2.7.23)和 $\varphi(t,x)\geqslant a_0>0$，对 $\delta\leqslant r_0$，则

$$
\left|\frac{\varphi(t_0,x_0)}{\varphi(t,x)}-1+\frac{D_x\varphi(t_0,x_0)}{\varphi(t_0,x_0)}(x-x_0)+\frac{D_t\varphi(t_0,x_0)}{\varphi(t_0,x_0)}(t-t_0)\right|
\leqslant\delta\rho_3(\delta)
\tag{2.7.25}
$$

其中 $\rho_3(\cdot)\in C(R^1_+)$，$\rho_3(0)=0$

由假设函数 $\varphi(\Phi-\Psi)$ 在点 (t_0,x_0) 达到极大，有

$$
\begin{aligned}
&\varphi(t,x)(\Phi(t,x)-\Psi(t,x))\\
&\leqslant\varphi(t_0,x_0)(\Phi(t_0,x_0)-\Psi(t_0,x))
\end{aligned}
\tag{2.7.26}
$$

如果 $|x-x_0|+|t-t_0|=\delta\leqslant r_0$，由式(2.7.26)和式(2.7.25)得

$$
\begin{aligned}
&\delta\rho_3(\delta)(\Phi(t_0,x_0)-\Psi(t_0,x_0))=\frac{\varphi(t_0,x_0)}{\varphi(t,x)}(\Phi(t_0,x_0)\\
&\quad-\Psi(t_0,x_0))-(\Phi(t_0,x_0)-\Psi(t_0,x_0))+\frac{D_x\varphi(t_0,x_0)}{\varphi(t_0,x_0)}(\Phi(t_0,x_0)\\
&\quad-\Psi(t_0,x_0))(x-x_0)+\frac{D_t\varphi(t_0,x_0)}{\varphi(t_0,x_0)}(\Phi(t_0,x_0)-\Psi(t_0,x_0))(t-t_0)\\
&\geqslant(\Phi(t,x)-\Psi(t,x))-(\Phi(t_0,x_0)-\Psi(t_0,x_0))
\end{aligned}
$$

$$+\frac{D_x\varphi(t_0,x_0)}{\varphi(t_0,x_0)}(\Phi-\Psi)(t_0,x_0)(x-x_0)+\frac{D_t\varphi}{\varphi}(\Phi-\Psi)(t_0,x_0)(t-t_0)$$

$$\geqslant\Phi(t,x)-\Phi(t_0,x_0)-D_x\Psi(t_0,x_0)(x-x_0)-D_t\Psi(t_0,x_0)(t-t_0)$$

$$-\delta\rho_2(\delta)+\frac{D_t\varphi}{\varphi}(\Phi-\Psi)(t-t_0)+\frac{D_x\varphi}{\varphi}(\Phi-\Psi)(t_0,x_0)(x-x_0)$$

即

$$\Phi(t,x)\leqslant\Phi(t_0,x_0)+\left(D_x\Psi(t_0,x_0)-\frac{D_x\varphi}{\varphi}(\Phi-\Psi)(t_0,x_0)\right)$$

$$\times(x-x_0)+\left(D_t\Psi-\frac{D_t\varphi}{\varphi}(\Phi-\Psi)(t_0,x_0)\right)(t-t_0)+\delta\rho_4(\delta)$$

这里 $\rho_4(\delta)=\rho_3(\delta)(\Phi(t_0,x_0)-\Psi(t_0,x_0))+\rho_2(\delta)$

上述不等式表明 $(\lambda,\xi)\in D^+\Phi(t_0,x_0)$

同理可证，如果 (t_0,x_0) 使得 $\varphi(\Phi-\Psi)$ 达到负的极小，则 $(\lambda,\xi)\in D^-\Phi(t_0,x_0)$ 证毕

引理 2.11 设 $\Phi(t,x)$ 是关于 x 的 Lipschitz 函数，满足条件

$$|\Phi(t,x_1)-\Phi(t,x_2)|\leqslant c|x_1-x_2|(1+|x_1|+|x_2|) \tag{2.7.27}$$

如果 $(\lambda,\xi)\in D^+\Phi(t,x)$（或 $D^-\Phi(t,x)$），则

$$|\xi|\leqslant c(1+|x|)$$

证 用 $(\lambda,\xi)\in D^+\Phi(t,x)$ 的定义，有不等式

$\Phi(t,x)\leqslant\Phi(t,x_0)+\xi\cdot(x-x_0)+|x-x_0|\rho(|x-x_0|)$，对 $|x-x_0|\leqslant r_0$，其中 $\rho(\cdot)\in C(R_+^1)$，$\rho(0)=0$

依式(2.7.27)的假设，由上述不等式得

$$0\leqslant\xi\cdot(x-x_0)+|x-x_0|\rho(|x-x_0|)$$
$$+c|x-x_0|(1+|x|+|x_0|)$$

令 $x-x_0=\delta e$。这里 e 是单位向量，$|e|=1$，则

$$0\leqslant\xi\cdot e+c(1+2|x_0|)$$

因为 e 是单位向量，故必须 $|\xi|\leqslant c(1+|x_0|)$ 证毕

现在考虑 HJB 偏微分方程(2.7.22)的粘性解：

$$\lambda-kV(t,x)+\inf_u\{f(x,u,t)+\xi\cdot g(x,u)\}\geqslant0$$

$$\forall(\lambda,\xi)\in D^+V(t,x) \tag{2.7.28}$$

$$\lambda - kV(t,x) + \inf_u\{f(x,u,t) + \xi \cdot g(x,u)\} \leqslant 0$$
$$\forall\ (\lambda,\xi) \in D^- V(t,x) \qquad (2.7.29)$$

其中，$f(x,u,t) = f(x,u)e^{-k(T-t)}$，$k>0$

依引理 2.8，有

$$|V(t,x)| \leqslant ce^{-k(T-t)}(1 + |x|^2) \qquad (2.7.30)$$

$$|V(t,x_1) - V(t,x_2)| \leqslant ce^{-k(T-t)}|x_1 - x_2|^\alpha(1 + |x_1| + |x_2|) \qquad (2.7.31)$$

$$|V(t_1,x) - V(t_2,x)| \leqslant ce^{-k|t_1-t_2|}(1 + |x|^2)(|t_1 - t_2|^{2(2-\alpha)^{-1}} + k|t_1 - t_2|) \qquad (2.7.32)$$

其中常数 c 与 k 无关。

对$\forall\ (\lambda,\xi) \in D^+ V(t,x)$或$(\lambda,\xi) \in D^- V(t,x)$，可以限制式(2.7.28)和式(2.7.29)中的取下确界的控制 u 满足

$$\{u|\,|u| \leqslant \gamma_0(1 + |x|)\} \qquad (2.7.33)$$

这里 γ_0 与 x 无关。

(1)当控制变量的集 U 是 R^r 中的有界集，则式(2.7.33)成立。

(2)当 $V(t,x)$是关于 x 的 Lipschitz 函数，满足

$$|V(t,x_1) - V(t,x_2)| \leqslant c|x_1 - x_2|e^{-k(T-t)}(1 + |x_1| + |x_2|)$$

则依引理 2.11，对$(\lambda,\xi)\in D^+V(t,x)$或$(\lambda,\xi)\in D^-V(t,x)$，有

$$|\xi| \leqslant c(1 + |x|)e^{-k(T-t)}$$

限制 u 为

$$(f_0|u|^2 - c_0)e^{k(T-t)} \leqslant c(1 + |x|)e^{-k(T-t)}(1 + |x| + |u|)$$

定理 2.11 在(G_3)、(F_3)和(H_3)的条件下，HJB 偏微分方程(2.7.14)的粘性解在函数类(2.7.30)、(2.7.31)和(2.7.32)中是唯一的。

证 证明分以下几步进行：

第一步 作函数

令

$$\mu(r) = \begin{cases} 1 - r, 当\ 0 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 0, 当\ r \geqslant 1 \end{cases}$$

和 $\mu(\cdot)\in C^1[0,\infty)$，$\mu(r)$是减少下降的函数，从而只要满足这样的条件在$\left[\frac{1}{2},1\right]$区间上可以任意。

约定

$$G_\beta(t,x)=\mu\left(\frac{|t|^2+|x|^2}{\beta^2}\right),x\in R^n,t\in R^1$$

设 $V_1(t,x)$和 $V_2(t,x)$是 HJB 偏微分方程(2.7.14)的两个粘性解。

令

$$M_\beta=\sup_{\substack{x,y\in R^n\\ t,s\in[0,T]}} G_\beta(t-s,x-y)\left(\frac{V_1(t,x)}{1+|x|^2}-\frac{V_2(s,y)}{1+|y|^2}\right)$$

第二步　要证

$$\liminf_{\beta\to 0} M_\beta=0 \tag{2.7.34}$$

用反证法。为此，假定

$$\liminf_{\beta\to 0} M_\beta>0 \tag{2.7.35}$$

因此，存在 $\beta_0>0$ 和 $m>0$，使得当 $\beta\leqslant\beta_0$ 时，$M_\beta\geqslant m>0$

令

$$M_\beta^\varepsilon=\sup_{\substack{x,y\in R^n\\ t,s\in(0,T)}} G_\beta(t-s,x-y)\left(\frac{V_1(t,x)e^{-\varepsilon|x|^2}}{1+|x|^2}-\frac{V_2(s,y)e^{-\varepsilon|y|^2}}{1+|y|^2}\right) \tag{2.7.36}$$

下面要证

$$\lim M_\beta^\varepsilon=M_\beta$$

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2 + |t_\varepsilon - s_\varepsilon|^2 \leqslant \beta^2 \qquad (2.7.38)$$

依式(2.7.37)的下极限定义，对 $m/2$ 存在 $\varepsilon_0(\beta)$ 使得 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0(\beta)$ 时，$M_\beta^\varepsilon > M_\beta^0 - m/2 \geqslant m - \frac{m}{2} = m/2$。所以

$$\frac{m}{2}e^{\varepsilon|x_\varepsilon|^2} \leqslant \frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)}{1+|x_\varepsilon|^2} - \frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)}{1+|y_\varepsilon|^2}e^{\varepsilon|x_\varepsilon|^2-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}$$

由此得存在与 $(\varepsilon,\beta)\in(0,\varepsilon_0)\times(0,\beta_0)$ 无关的正常数 c_0，使得 $\varepsilon|x_\varepsilon|^2, \varepsilon|y_\varepsilon|^2 \leqslant c_0$

由点 $(t_\varepsilon,x_\varepsilon)$，$(s_\varepsilon,y_\varepsilon)$ 的定义，M_β^ε 可写为

$$M_\beta^\varepsilon = G_\beta(t_\varepsilon - s_\varepsilon, x_\varepsilon - y_\varepsilon)\left(\frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)}{1+|x_\varepsilon|^2} - \frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)}{1+|y_\varepsilon|^2}\right)e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2}$$

$$+ G_\beta(t_\varepsilon - s_\varepsilon, x_\varepsilon - y_\varepsilon)\frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)}{1+|y_\varepsilon|^2}\left(e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2} - e^{-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}\right)$$

上述等式右端第二项→$0(\varepsilon\downarrow 0)$。因此得

$$\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}} M_\beta^\varepsilon \leqslant M_\beta$$

由这个不等式和不等式(2.7.37)，得

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} M_\beta^\varepsilon = M_\beta$$

下面证明，在式(2.7.35)假定之下，得出矛盾。

由点 $(t_\varepsilon,x_\varepsilon)$，$(s_\varepsilon,y_\varepsilon)$ 的定义，有下式

$$G_\beta(t_\varepsilon - s_\varepsilon, x_\varepsilon - y_\varepsilon) = \frac{M_\beta^\varepsilon}{\dfrac{(V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon) - V_2(t_\varepsilon,x_\varepsilon))e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2} + X_\varepsilon}$$

其中

$$X_\varepsilon = \frac{V_2(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|} - \frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}$$

由 M_β^ε 的定义和上式，得

$$G_\beta(t_\varepsilon - s_\varepsilon, x_\varepsilon - y_\varepsilon) \geqslant \frac{M_\beta^\varepsilon}{M_\beta^\varepsilon + X_\varepsilon} \qquad (2.7.39)$$

用估计式(2.7.30)、(2.7.31)、(2.7.32)和式(2.7.38)，可得

$$0 \leqslant X_r \leqslant c(\beta^{\alpha(2-\alpha)^{-1}} + k\beta)$$

这里常数 c 与 β 和 ε 无关，也与 k 无关。

现在让 β 满足不等式

$$c(\beta^{\alpha(2-\alpha)^{-1}} + k\beta) \leqslant m/2 \leqslant M_\beta^r \qquad (2.7.40)$$

于是

$$X_r \leqslant M_\beta^r$$

由式(2.7.39)和上面的不等式，得

$$G_\beta(t_r - s_r, x_r - y_r) \geqslant \frac{1}{2}$$

由函数 G_β 的定义和上式有

$$G_\beta(t_r - s_r, x_r - y_r) = 1 - \left(\frac{|x_r - y_r|^2 + |t_r - s_r|^2}{\beta^2}\right)$$

$$\frac{M_\beta^r}{M_\beta^r + c(\beta^{\alpha(2-\alpha)^{-1}} + k\beta)} \leqslant \frac{M_\beta^r}{X_r + M_\beta^r}$$
$$\leqslant G_\beta(t_r - s_r, x_r - y_r)$$
$$= 1 - \frac{(|x_r - y_r|^2 + |t_r - s_r|^2)}{\beta^2}$$

即

$$\frac{(|x_r - y_r|^2 + |t_r - s_r|^2)}{\beta^2} \leqslant 1 - \frac{M_\beta^r}{M_\beta^r + c(\beta^{\alpha(2-\alpha)^{-1}} + k\beta)}$$
$$= \frac{c(\beta^{\alpha(2-\alpha)^{-1}} + k\beta)}{M_\beta^r + c(\beta^{\alpha(2-\alpha)^{-1}} + k\beta)}$$
$$\leqslant \frac{2c(\beta^{\alpha(2-\alpha)^{-1}} + k\beta)}{m}$$
$$= c_1(\beta^{\alpha(2-\alpha)^{-1}} + k\beta)$$

所以

$$(|x_r - y_r|^2 - |t_r - s_r|^2)^{1/2} \leqslant c_1(\beta^{\alpha(2-\alpha)^{-1}} + k\beta)^{1/2}\beta$$
$$\leqslant c_2(\beta^{\alpha(4-3\alpha)^{-1}} + k^{1/2}\beta^{1/2})\beta \qquad (2.7.41)$$

函数

$$\frac{G_\beta(t-s_\varepsilon,x-y_\varepsilon)e^{-\nu|x|^2}}{1+|x|^2}\left\{V_1(t,x)-\frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)}{1+|y_\varepsilon|^2}e^{-\nu|y_\varepsilon|^2}e^{\nu|x|^2}(1+|x|^2)\right\}$$

在点$(t_\varepsilon,x_\varepsilon)$达到正极大，和函数

$$\frac{G_\beta(t_\varepsilon-s,x_\varepsilon-y)e^{-\nu|y|^2}}{1+|y|^2}\left\{V_2(s,y)-\frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)}{1+|x_\varepsilon|^2}e^{-\nu|x_\varepsilon|^2}e^{\nu|y|^2}(1+|y|^2)\right\}$$

在点$(s_\varepsilon,y_\varepsilon)$达到负极小。

依引理 2.10，$(\lambda_1,\xi_1)\in D^+V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)$和$(\lambda_2,\xi_2)\in D^-V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)$，其中

$$\lambda_1=-\frac{D_tG_\beta}{G_\beta}(t_\varepsilon-s_\varepsilon,x_\varepsilon-y_\varepsilon)e^{\nu|x_\varepsilon|^2}(1+|x_\varepsilon|^2)$$

$$\times\left\{\frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\nu|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}-\frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\nu|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\right\}$$

$$\xi_1=-\left\{\frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\nu|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}-\frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\nu|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\right\}$$

$$\times\frac{D_xG_\beta}{G_\beta}(t_\varepsilon-s_\varepsilon,x_\varepsilon-y_\varepsilon)e^{\nu|x_\varepsilon|^2}(1+|x_\varepsilon|^2)$$

$$+\frac{2V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)}{1+|x_\varepsilon|^2}x_\varepsilon(1+\nu(1+|x_\varepsilon|^2))$$

$$\lambda_2=-\frac{D_tG_\beta}{G_\beta}(t_\varepsilon-s_\varepsilon,x_\varepsilon-y_\varepsilon)e^{\nu|y_\varepsilon|^2}(1+|y_\varepsilon|^2)$$

$$\times\left\{\frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\nu|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}-\frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\nu|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\right\}$$

$$\xi_2=-\left\{\frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\nu|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}-\frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\nu|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\right\}$$

$$\times\frac{D_xG_\beta}{G_\beta}(t_\varepsilon-s_\varepsilon,x_\varepsilon-y_\varepsilon)e^{\nu|y_\varepsilon|^2}(1+|y_\varepsilon|^2)$$

$$+\frac{2V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)}{1+|y_\varepsilon|^2}y_\varepsilon(1+\nu(1+|y_\varepsilon|^2))$$

在式(2.7.28)两端用$(1+|x_\varepsilon|^2)^{-1}e^{-\nu|x_\varepsilon|^2}$乘，和在式(2.7.29)两端用$(1+|y_\varepsilon|^2)^{-1}e^{-\nu|y_\varepsilon|^2}$乘，将$(\lambda_1,\xi_1)$，$(\lambda_2,\xi_2)$代入，两式相减得

$$k\left\{\frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\nu|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}-\frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\nu|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\right\}$$

$$
\leqslant \inf_{u}\left\{\frac{f(x_\varepsilon,u,t_\varepsilon)}{1+|x_\varepsilon|^2}e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2}\right.
$$

$$
+\frac{2g(x_\varepsilon,u)x_\varepsilon V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}\left(\varepsilon+\frac{1}{1+|x_\varepsilon|^2}\right)
$$

$$
-g(x_\varepsilon,u)\frac{D_xG_\beta}{G_\beta}(t_\varepsilon-s_\varepsilon,x_\varepsilon-y_\varepsilon)\left(\frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}\right.
$$

$$
\left.\left.-\frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\right)\right\}-\inf_{u}\left\{\frac{f(y_\varepsilon,u,s_\varepsilon)}{1+|y_\varepsilon|^2}e^{-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}\right.
$$

$$
+\frac{2g(y_\varepsilon,u)y_\varepsilon V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\left(\varepsilon+\frac{1}{1+|y_\varepsilon|^2}\right)
$$

$$
-g(y_\varepsilon,u)\frac{D_xG_\beta}{G_\beta}(t_\varepsilon-s_\varepsilon,x_\varepsilon-y_\varepsilon)\left(\frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}\right.
$$

$$
\left.\left.-\frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\right)\right\} \tag{2.7.42}
$$

依式(2.7.33),可以限制在式(2.7.33)中的下确界的 u 满足

$$
|u|\leqslant \gamma_0(1+|x_\varepsilon|)
$$

在这个关于 u 的条件下,注意到式(2.7.41)得估计式

$$
\left|\frac{f(x_\varepsilon,u,t_\varepsilon)e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}-\frac{f(y_\varepsilon,u,s_\varepsilon)e^{-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\right|
$$

$$
\leqslant c\{\beta^{\alpha+\alpha^2(4-2\alpha)^{-1}}+k^\alpha\beta^{3\alpha/2}+k\beta^{1+\alpha(4-2\alpha)^{-1}}
$$

$$
+k\beta^{3/2}\} \tag{2.7.43}
$$

存在正常数 β_0,注意到估计式(2.7.41)得

$$
\frac{2g(x_\varepsilon,u)x_\varepsilon V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}\left(\varepsilon+\frac{1}{1+|x_\varepsilon|^2}\right)
$$

$$
-\frac{2g(y_\varepsilon,u)y_\varepsilon V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\left(\varepsilon+\frac{1}{1+|y_\varepsilon|^2}\right)
$$

$$
=2g(x_\varepsilon,u)x_\varepsilon\left(\varepsilon+\frac{1}{1+|x_\varepsilon|^2}\right)
$$

$$
\times\left(\frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}-\frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\right)
$$

$$+\frac{2V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\left(g(x_\varepsilon,u)x_\varepsilon\left(\varepsilon+\frac{1}{1+|x_\varepsilon|^2}\right)\right.$$

$$\left.-g(y_\varepsilon,u)y_\varepsilon\left(\varepsilon+\frac{1}{1+|y_\varepsilon|^2}\right)\right)$$

$$\leqslant \beta_0\left(\frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}-\frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\right)$$

$$+c\beta(\beta^{\alpha(1-2\alpha)-1}+k\beta^{1/2})$$

但是

$$\left|\frac{D_xG_\beta}{G_\beta}(t_\varepsilon-s_\varepsilon,x_\varepsilon-y_\varepsilon)\right|\leqslant c\beta^{-1}$$

则成立估计式

$$\left|(g(x_\varepsilon,u)-g(y_\varepsilon,u))\frac{D_xG_\beta}{G_\beta}\left(\frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}-\frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\right)\right|$$

$$\leqslant c(\beta^{\alpha(1-2\alpha)-1}+k\beta^{1/2})$$

其中常数 c 与 k 无关。

用上面的几个估计式，由式(2.7.42)得

$$\varlimsup_{\beta\to 0}(k-\beta_0)\left(\frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}-\frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\right)\leqslant 0$$

选 $k>\beta_0$ 得

$$\varlimsup_{\beta\to 0}\left(\frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}-\frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\right)\leqslant 0$$

由此不等式和前面的结果可得

$$0<m\leqslant\varlimsup_{\beta\to 0}M_\beta=\varlimsup_{\beta\to 0}\varlimsup_{\varepsilon\to 0}M_\beta^\varepsilon=\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{\beta\to 0}M_\beta^\varepsilon$$

$$=\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{V_1(t_\varepsilon,x_\varepsilon)e^{-\varepsilon|x_\varepsilon|^2}}{1+|x_\varepsilon|^2}-\frac{V_2(s_\varepsilon,y_\varepsilon)e^{-\varepsilon|y_\varepsilon|^2}}{1+|y_\varepsilon|^2}\right)\leqslant 0$$

这是一矛盾。这表明假定

$$\varlimsup_{\beta\to 0}M_\beta>0$$

不成立。因此必须

$$\lim_{\beta\to 0} M_\beta = 0$$

第三步　要证明唯一性。事实上，对 $|x-y|^2+|t-s|^2\geqslant\beta^2\Rightarrow G_\beta=0$。因此 $M_\beta\geqslant 0$。因为 $|\mu(r)|\leqslant 1,\forall\ r\in[0,\infty)\Rightarrow|G_\beta|\leqslant 1,\forall\ \beta$。而 $V_1(t,x)$ 和 $V_2(t,x)$ 满足估计式(2.7.30)。所以 $M_\beta\leqslant c$。用第二步证明的结果式(2.7.34)成立，在 M_β 的定义中，取 $y=x,s=t$，得

$$M_\beta\geqslant\frac{V_1(t,x)}{1+|x|^2}-\frac{V_2(t,x)}{1+|x|^2},\forall\ (t,x)\in[0,T]\times R^n$$

在式(2.7.34)成立时得 $V_1(t,x)-V_2(t,x)\leqslant 0$。对换 $V_1(t,x)$ 与 $V_2(t,x)$ 的位置，得 $V_2(t,x)-V_1(t,x)\leqslant 0$。故 $V_1(t,x)=V_2(t,x),\forall\ (t,x)\in[0,T]\times R^n$。所以 HJB 偏微分方程(2.7.14)的粘性解是唯一的。

证毕

第三章　分布参数系统的最优控制

20 世纪 60 年代初期，由于科学技术的发展和实际工程控制系统设计的需要，以及集中参数系统最优控制发展的影响，现代控制理论的一个新的分枝——分布参数系统的控制理论开始萌芽、发展。集中参数系统是指具有有穷个自由度的物理系统；分布参数系统是指具有无穷个自由度的物理系统。用数学语言讲，集中参数系统是用常微分方程来描述其运动规律的控制系统，分布参数系统是用偏微分方程，或偏微分积分方程，或偏微分方程与常微分方程的耦合方程来描述其运动规律的系统。在实际问题中，多是偏微分方程描述的系统。例如，用热传导方程描述的温度场的控制系统，用梁振动方程描述的导弹结构弹性振动的控制系统，用梁振动偏微分方程和常微分方程的耦合方程来描述的柔性-刚性机器人的控制系统，都是分布参数控制系统。用常微分方程描述的集中参数系统的状态空间是一个有穷维空间，系统在每一瞬时的状态是这个有穷维空间中的一个点。分布参数系统在每一瞬时的状态是一个函数，是一个无穷维空间中的一个元。分布参数系统既然是一个无穷维的系统，描述分布参数系统的数学模型既然是一个偏微分方程，那么，研究无穷维空间的分析学——泛函分析和现代偏微分方程理论，便是必须的数学工具。

§3.1　具有二次性能指标的系统的最优控制

设 Ω 是 n 维欧氏空间 R^n 中的一个有界区域。Ω 的边界 Γ 是分片光滑曲面。$x=(x_1,\cdots,x_n)$ 是 R^n 中的点。记 $Q(T)=(0,T)\times\Omega$ 为 $R^{n+1}=(-\infty,\infty)\times R^n$ 中的柱体。$S(T)=(0,T)\times\Gamma\subset R^{n+1}$ 是

$Q(T)$的侧面。

考虑受控系统

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)-C(x)y+f(t,x),(t,x)\in Q(T)$$

(3.1.1)

其中 $a_{ij}(t,x)=a_{ji}(t,x),\forall\ (t,x)\in Q(T),i,j=1,2,\cdots,n$。存在正常数 μ 使得不等式

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j\geqslant\mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\forall\ (\xi_1,\cdots,\xi_n)\in R^n$$

对任何$(t,x)\in\overline{Q(T)}$成立，$C(x)\geqslant c_0>0,\forall\ x\in\Omega,c_0$ 是常数。

边界条件

$$\left.\frac{\partial y}{\partial\nu}\right|_{\Gamma}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(\boldsymbol{n},x_i)+a(t,x)y$$

$$=b(t,x)u(t,x),\forall\ (t,x)\in S(T)\qquad(3.1.2)$$

初始条件

$$y(t,x)|_{t=0}=y_0(x),\forall\ x\in\Omega\qquad(3.1.3)$$

这里 $b(t,x),a(t,x)$和 $y_0(x)$是已给函数，$u(t,x)$是系统的控制量，$\boldsymbol{n}$是 Γ 上的单位内法向量。

控制系统的性能指标为

$$J(u)=I(u)+\beta\int_0^T\int_\Gamma u^2(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\qquad(3.1.4)$$

这里 $\beta\geqslant0$ 是常数

$$I(u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}\int_0^T M_i^2(t)\mathrm{d}t$$

$$M_i(t)=\int_\Gamma\varphi_i(x)y(t,x)\mathrm{d}x\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

其中，$\varphi_i(x)$是已知的权函数，$\varphi_i(\cdot)\in L^2(\Gamma)(i=1,2,\cdots,n)$。

容许控制类为

$$D_1=\left\{u(t,x)\left|\int_0^T\int_\Gamma u^2(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant M\right.\right\}$$

$$D_2=\left\{u(t,x)\left|\int_0^T\int_\Gamma u^2(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty\right.\right\}$$

$D_3=\{u(t,x)\mid u(t,x)$在$(0,T)\times\Gamma$上可测，$u_0\leqslant u(t,x)\leqslant u_1$，对几乎一切$(t,x)\in S(T)\}$

其中u_0,u_1是两个常数。

用D表示$D_i(i=1,2,3)$之一。最优控制问题是寻求$u^0\in D$使得

$$J(u^0)=\inf_{u\in D}J(u)$$

泛函$J(\cdot)$达到最小的$u^0\in D$，称为系统(3.1.1)—(3.1.2)—(3.1.3)的最优控制。相应于最优控制$u^0(\cdot)$的偏微分方程(3.1.1)—(3.1.2)—(3.1.3)的解$y(t,x,u^0)$称为系统的最优轨道。任一容许控制$u(\cdot,\cdot)\in D$所对应的偏微分方程(3.1.1)—(3.1.2)—(3.1.3)的解$y(t,x,u)$称为容许轨道。因为控制$u(\cdot,\cdot)$加在偏微分方程的边界条件(3.1.2)上，所以控制问题又称为边界控制问题。

假定$a_{ij}(t,x)(i,j=1,2,\cdots,n)$是$Q(T)$上的有界可测函数，$C(x)$是$\Omega$上的有界可测函数，$a(t,x)$，$b(t,x)$是$S(T)$上的有界可测函数。$y_0(\cdot)\in L^2(\Omega)$，$f(\cdot,\cdot)\in L^2(Q(T))$，$u(\cdot,\cdot)\in L^2(S(T))$。在这些假设之下，偏微分方程(3.1.1)—(3.1.2)—(3.1.3)存在唯一解$y(\cdot,\cdot)\in L^2(Q(T))$是广义弱解，$y(t,\cdot)$是$t$在$L^2(\Omega)$中取值的矢值函数，$y_{x_i}(\cdot,\cdot)\in L^2(Q(T))$($y_{x_i}$是Sobolev意义下的广义导数)，并且满足积分等式

$$\int_\Omega y\varphi\Big|_0^t\mathrm{d}\Omega-\int_{Q(t)}y\varphi_t\mathrm{d}Q+\int_{Q(t)}a_{ij}y_{x_i}\varphi_{x_j}\mathrm{d}Q$$
$$+\int_{Q(t)}Cy\varphi\mathrm{d}Q-\int_{Q(t)}f\varphi\mathrm{d}Q+\int_{S(t)}(ay-bu)\varphi\mathrm{d}s=0 \tag{3.1.5}$$

对一切$t\in(0,T)$和任意的$\varphi\in H^1(Q(T))$成立，这里$H^1(Q(T))$表示具有一阶广义导数的Sobolev空间，且成立不等式

$$\int_\Omega y^2\mathrm{d}\Omega+\int_{Q(t)}\sum_{j=1}^n(y_{x_j})^2\mathrm{d}Q+\int_{S(t)}y^2\mathrm{d}S$$
$$\leqslant c(T)\left\{\int_{Q(t)}f^2\mathrm{d}Q+\int_\Omega y_0^2\mathrm{d}\Omega+\int_{S(t)}b^2u^2\mathrm{d}S\right\} \tag{3.1.6}$$

对一切 $t\in(0,T)$ 成立，其中 $c(T)$ 是依赖于 T 的正常数。

现在将系统(3.1.1)—(3.1.2)—(3.1.3)分解为两个系统。即是下面的系统(3.1.7)—(3.1.8)—(3.1.9)和系统(3.1.10)—(3.1.11)—(3.1.12)：

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)-C(x)y \tag{3.1.7}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(\boldsymbol{n},x_i)+a(t,x)y$$
$$=b(t,x)u(t,x) \tag{3.1.8}$$

$$y(t,x)|_{t=0}=0 \tag{3.1.9}$$

和系统

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)-C(x)y+f(t,x) \tag{3.1.10}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(\boldsymbol{n},x_i)+a(t,x)y=0 \tag{3.1.11}$$

$$y(t,x)|_{t=0}=y_0(x) \tag{3.1.12}$$

偏微分方程(3.1.1)—(3.1.2)—(3.1.3)的解 $y_1(t,x,u)$ 是偏微分方程(3.1.7)—(3.1.8)—(3.1.9)的解 $y(t,x,u)$ 与偏微分方程(3.1.10)—(3.1.11)—(3.1.12)的解 $y_0(t,x)$ 的和，$y_1(t,x,u)=y(t,x,u)+y_0(t,x)$。系统(3.1.10)—(3.1.11)—(3.1.12)与控制量 u 无关，只与 f 和 y_0 有关。系统(3.1.7)—(3.1.8)—(3.1.9)与 f 和 y_0 无关，只与控制量 u 有关，并且是线性控制系统，即 $y(t,x,u)$ 关于 u 是线性的。

令

$$\alpha_i(t)=\int_\Gamma\psi_i(x)y_0(t,x)\mathrm{d}x\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$y(t,x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i(t)}{\sigma_i^2}\psi_i(x)$$

$$K(x,\xi)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\psi_i(x)\psi_i(\xi)}{\sigma_i^2}$$

记 $y(t,x,u)$ 是偏微分方程(3.1.7)—(3.1.8)—(3.1.9)的

解。约定

$$S_0 y(t,x,u)=\int_{\Gamma} K(x,\xi)y(t,\xi,u)\mathrm{d}\xi+\gamma(t,x)$$

考虑系统(3.1.7)—(3.1.8)—(3.1.9)的伴随系统

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)-c(x)\psi \qquad (3.1.13)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\cos(n,x_i)+a(t,x)\psi$$

$$=S_0 y(t,x,u) \qquad (3.1.14)$$

$$\psi(t,x)|_{t=T}=0 \qquad (3.1.15)$$

依前面所述,偏微分方程(3.1.13)—(3.1.14)—(3.1.15)存在唯一广义弱解 $\psi(t,x,u)$ 满足积分等式

$$-\int_{\Omega}\psi(0,x,u)\varphi(0,x)\mathrm{d}x+\int_{Q(T)}\psi(\tau,x,u)\varphi_t(\tau,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$

$$+\int_{Q(T)}a_{ij}(\tau,x)\psi_{x_j}(\tau,x,u)\varphi_{x_i}(\tau,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$

$$+\int_{Q(T)}C(x)\psi(\tau,x,u)\varphi(\tau,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_{S(T)}(a(\tau,x)\psi(\tau,x,u)$$

$$-S_0 y(\tau,x,u))\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$

$$=0,\forall\ \varphi\in H^1(Q(T)) \qquad (3.1.16)$$

偏微分方程(3.1.13)—(3.1.14)—(3.1.15)的解 $\psi(t,x)$ 称为协态过程。

引理 3.1 对于任意的 $u(\cdot),u^0(\cdot)\in L^2(S(T))$,相应于 $u(\cdot)$ 和 $u^0(\cdot)$ 的偏微分方程(3.1.7)—(3.1.8)—(3.1.9)的解 $y(t,x,u)$, $y(t,x,u^0)$ 和偏微分方程(3.1.13)—(3.1.14)—(3.1.15)的解 $\psi(t,x,u^0)$,成立等式

$$\int_0^T\int_{\Gamma}b(t,x)u(t,x)\psi(t,x,u^0)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T\int_{\Gamma}S_0 y(t,x,u^0)y(t,x,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

证 用 $\psi(t,x,u^0)$ 乘方程(3.1.7)的两端后在 $Q(T)$ 上积分得

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial y}{\partial t}\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$-\int_0^T\int_\Omega C(x)y\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T\int_\Gamma \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(n,x_i)\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$-\int_0^T\int_\Omega C(x)y\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T\int_\Gamma b(t,x)u(t,x)\psi(t,x,u^0)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T\int_\Gamma a(t,x)y\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$-\int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T\int_\Omega C(x)y\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad (3.1.17)$$

用 $y(t,x,u)$乘方程(3.1.13)的两端后在 $Q(T)$上积分得

$$-\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial t}y \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Gamma \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\cos(n,x_i)y \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$-\int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\frac{\partial y}{\partial x_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T\int_\Omega C(x)\psi y \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T\int_\Omega S_0 y(t,x,u^0)y(t,x,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T\int_\Gamma a(t,x)\psi y \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$-\int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\frac{\partial y}{\partial x_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T\int_\Omega C(x)\psi y \mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad (3.1.18)$$

用关系式

$$-\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial t}y \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega \psi\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

和 $a_{ij}(t,x)=a_{ji}(t,x)(i,j=1,\cdots,n)$，由式(3.1.17)—(3.1.18)便得引理的结论。 证毕

引理 3.2 设 A 是 Hilbert 空间 H 中的有界对称半正定算子，D 是空间 H 中的凸集，f 是 H 中的元，为了 $u^0\in D$ 使得泛函 $I(u)=\langle Au,u\rangle+2\langle f,u\rangle$在 D 上达到最小，必须且只须

$$\langle Au^0+f,u-u^0\rangle\geqslant 0 \quad \forall\, u\in D \qquad (3.1.19)$$

其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示 H 中的内积。

证 设 $u^0\in D$ 使得泛函 $I(u)$ 达到最小，对任一 $u\in D$ 和 $\theta\in(0,1)$，由于 D 是凸集，$(1-\theta)u^0+\theta u\in D$，有

$$I(u^0)\leqslant I((1-\theta)u^0+\theta u)$$

于是有

$$0\leqslant\lim_{\theta\downarrow 0}\frac{1}{\theta}\{I((1-\theta)u^0+\theta u)-I(u^0)\}$$

$$=\langle I'(u^0),u-u^0\rangle=2\langle Au^0+f,u-u^0\rangle\quad\forall\ u\in D$$

反之，如果式(3.1.19)成立，对任一 $\theta\in(0,1)$，泛函 $I(u)$ 是凸泛函，成立不等式

$$I(u)-I(u^0)\geqslant\frac{1}{\theta}\{I((1-\theta)u^0+\theta u)-I(u^0)\},\forall\ u\in D$$

令 $\theta\downarrow 0$ 得

$$I(u)-I(u^0)\geqslant\langle I'(u^0),u-u^0\rangle=2\langle Au^0+f,u-u^0\rangle\geqslant 0,\forall\ u\in D。$$

这表明 u^0 使得泛函 $I(u)$ 在 D 上达到最小。　　　　证毕

由前面所述 $y_1(t,x,u)=y(t,x,u)+y_0(t,x)$，代入 $M_i(t)$ 的表达式

$$M_i(t)=\int_\Gamma\psi_i(x)y_1(t,x,u)\mathrm{d}x=\int_\Gamma\psi_i(x)y(t,x,u)\mathrm{d}x$$

$$+\int_\Gamma\psi_i(x)y_0(t,x)\mathrm{d}x$$

$$=\alpha_i(t)+\int_\Gamma\psi_i(x)y(t,x,u)\mathrm{d}x$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{M_i^2(t)}{\sigma_i^2}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i^2(t)}{\sigma_i^2}+2\int_\Gamma\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i(t)\psi_i(x)}{\sigma_i^2}y(t,x,u)\mathrm{d}x$$

$$+\int_\Gamma\int_\Gamma K(x,\xi)y(t,x,u)y(t,\xi,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi$$

令

$$L(y)=\int_0^T\int_\Gamma\gamma(t,x)y(t,x,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\Phi(y,z)=\int_0^T\int_\Gamma\int_\Gamma K(x,\xi)y(t,x,u)z(t,\xi,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t$$

$$\alpha_0 = \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2(t)}{\sigma_i^2} \mathrm{d}t$$

泛函 $I(u)$ 可写为

$$I(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} \int_0^T M_i^2(t) \mathrm{d}t = \Phi(y,y) + 2L(y) + \alpha_0$$

因为 α_0 是与控制 u 无关的常数。求泛函 $I(u)$ 的极值等价于求

$$I_0(u) = \Phi(y,y) + 2L(y)$$

的极值。令

$$J_0(u) = I_0(u) + \beta \| u \|^2_{L^2(S(T))}$$

定理 3.1 为了 $u^0 \in D$ 使得泛函 $J_0(u)$ 在 D 上达到极小，必须且只须

$$\int_0^T \int_\Gamma (u - u^0)(b(t,x)\psi(t,x,u^0) + \beta u^0(t,x)) \mathrm{d}x \mathrm{d}t \geqslant 0 \quad \forall u \in D$$

这里 $\psi(t,x,u^0)$ 是伴随偏微分方程(3.1.13)—(3.1.14)—(3.1.15)的相应于状态 $y(t,x,u^0)$ 的解。

证 依假设 $\varphi_i(\cdot) \in L^2(\Gamma)(i=1,2,\cdots,n)$ 及关系式

$$(Ku)(t,x) = \int_\Gamma K(x,\xi)u(\xi,t)\mathrm{d}\xi$$

定义一个从空间 $L^2(S(T))$ 到 $L^2(S(T))$ 的有界线性算子 K，从积分核 $K(x,\xi)$ 的定义知道，算子 K 是从 $L^2(S(T))$ 到 $L^2(S(T))$ 的对称半正定有界线性算子。

任一 $\varphi(\cdot) \in H^1(\Omega)$，依嵌入定理，$\varphi(x)$ 在 Γ 上的迹 $\varphi^s(\cdot) \in L^2(\Gamma)$。因此定义了一个映射 $S: \varphi \to \varphi^s$，是从 $H^1(\Omega)$ 到 $L^2(\Gamma)$ 的有界线性算子。任一 $u \in D$，偏微分方程(3.1.7)—(3.1.8)—(3.1.9)的广义弱解 $y(t,x,u) \in L^2((0,T),H^1(\Omega))$。因此 $y(t,x,u)$ 在 Γ 上的迹 $y^s(t,x,u) \in L^2((0,T),L^2(\Gamma))$。任一 $u \in L^2(S(T)) \to y(t,x,u) \in L^2((0,T),H^1(\Omega)) \to y^s(t,x,u) \in L^2(S(T))$。这样就建立了一个从空间 $L^2(S(T))$ 到自身的一个线性算子 K_1，由不等式(3.1.6)已知，K_1 是 $L^2(S(T))$ 空间中的有界线性算子。

泛函 $J_0(u)$ 用算子 K_1 来表达，可写为

$$J_0(u)=\langle KK_1u,K_1u\rangle+2\langle\gamma,K_1u\rangle+\beta\langle u,u\rangle$$
$$=\langle(K_1^*KK_1+\beta I)u,u\rangle+2\langle K_1^*\gamma,u\rangle$$

这里 K_1^* 表示 K_1 的伴随算子，I 是 $L^2(S(T))$中的单位算子。

在引理 3.2 中，取 $A=K_1^*KK_1+\beta I$，$f=K_1^*\gamma$。则 A 是对称的半正定有界线性算子。由引理 3.2，为了 $u^0\in D$ 使得 $J_0(u)$在 D 上达到极小，必须且只须

$$\langle(K_1^*KK_1+\beta I)u^0+K_1^*\gamma,u-u^0\rangle\geqslant 0\quad\forall u\in D。$$

即

$$\langle KK_1u^0,K_1u-K_1u^0\rangle+\langle\gamma,K_1u-K_1u^0\rangle$$
$$\geqslant-\beta\langle u^0,u-u^0\rangle\quad\forall u\in D\qquad(3.1.20)$$

依算子 K 和 K_1 的定义，由引理 3.1 得

$$\langle KK_1u^0,K_1u-K_1u^0\rangle+\langle\gamma,K_1u-K_1u^0\rangle$$
$$=\int_0^T\int_\Gamma\int_\Gamma K(x,\xi)y(t,\xi,u^0)[y(t,x,u)-y(t,x,u^0)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^T\int_\Gamma\gamma(t,x)[y(t,x,u)-y(t,x,u^0)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^T\int_\Gamma[y(t,x,u)-y(t,x,u^0)]S_0y(t,x,u^0)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^T\int_\Gamma b(t,x)\psi(t,x)[u(t,x)-u^0(t,x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\quad\forall u\in D$$

将上式代入式(3.1.20)，可得所需要的结论。　　　　证毕

推论 3.1　如果 $D=D_1$，$b(t,x)\psi^*(t,x,u^0)+\beta u^0(t,x)\neq 0$，对几乎一切$(t,x)\in S(T)$，为了 $u^0\in D$ 使得泛函 $J_0(u)$在 D_1 上达到极小，必须且只须

$$u^0(t,x)=\frac{M^{1/2}}{\left(\int_0^T\int_\Gamma(b\psi(t,x,u^0)+\beta u^0)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/2}}(\beta u^0(t,x)$$
$$+b(t,x)\psi^*(t,x,u^0))$$

对几乎一切$(t,x)\in S(T)$成立。

推论 3.2　如果 $D=D_2$，为了 $u^0\in D_2$ 使得泛函 $J_0(u)$在 D_2 上达到极小，必须且只须

$$b(t,x)\psi^*(t,x,u^0)+\beta u^0(t,x)=0,\text{对几乎一切}(t,x)\in S(T)$$
成立。

设 X 是一个实的 Banach 空间，$f_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$是 X 上的泛函。令

$$D=\{x\,|\,x\in X,f_i(x)\leqslant 0,i=1,2,\cdots,n\}$$

问题是求 $x^0\in D$ 使得

$$\inf_{x\in D} f_0(x)=f_0(x^0)$$

称 x^0 为 $f_0(x)$在 D 上的极小元。

引理 3.3 设 $f_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$是空间 X 上的连续凸泛函，$x^0\in D$ 使得

$$\inf_{x\in D} f_0(x)=f_0(x^0)$$

则存在常数 $\alpha_i(i=0,1,\cdots,n)$使得 $\alpha_i\geqslant 0(i=0,1,\cdots,n)$，$\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n>0$ 和

$$\inf_{x\in X}\sum_{i=0}^{n}\alpha_i f_i(x)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i f_i(x^0)$$

证 定义映 X 到 R^{n+1}的映射如下：任一 $x\in X$，

$$T(x)=(f_0(x)-f_0(x^0),f_1(x)-f_1(x^0),\cdots,f_n(x)-f_n(x^0))$$

令

$$E=\{Y\,|\,Y\geqslant T(x),Y\in R^{n+1},\text{对某一}x\in X\}$$

这里向量 $Y\geqslant T(x)$等价于 $y_i\geqslant f_i(x)-f_i(x^0)(i=0,1,\cdots,n)$，$Y=(y_0,y_1,\cdots,y_n)$。

如上定义的集 E 具有下面的性质：

(1)集 E 是 R^{n+1}中的凸集。事实上，如果 $Y_1,Y_2\in E$，则存在 $x_1,x_2\in X$ 使得 $Y_1\geqslant T(x_1)$，$Y_2\geqslant T(x_2)$。由假设 $f_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$是凸泛函，所以 $T(x)$是凸映射。于是 $\alpha_1Y_1+(1-\alpha)Y_2\geqslant\alpha T(x_1)+(1-\alpha)T(x_2)\geqslant T(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$，$\alpha\in[0,1]$。故 E 是 R^{n+1}中的凸集。

(2)集 E 在 R^{n+1}中有内点。事实上，对某一 $x^*\in X$，取 $Y^*>T(x^*)$。$Y^*=(y_0^*,y_1^*,\cdots,y_n^*)$

令

$$\varepsilon = \min_{0 \leq i \leq n} \{y_i^* - (f_i(x^*) - f_i(x^0))\} > 0$$

则

$$y_i^* - \varepsilon \geq f_i(x^*) - f_i(x^0) (i = 0,1,\cdots,n)$$

依假设 $f_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$连续,对上述的 ε,存在 $\delta(\varepsilon)>0$,只要 $\|x-x^*\|<\delta(\varepsilon)$时,则

$$f_i(x^*) - \varepsilon/2 < f_i(x) < f_i(x^*) + \varepsilon/2 \quad (i = 0,1,\cdots,n)$$

对满足条件

$$|y_i - y_i^*| < \varepsilon/2 (i = 0,1,\cdots,n)$$

的 $Y=(y_0,y_1,\cdots,y_n)$成立不等式

$$f_i(x) - f_i(x^0) = f_i(x) - f_i(x^*) + f_i(x^*) - f_i(x^0)$$

$$< \varepsilon/2 + y_i^* - \varepsilon = y_i^* - \varepsilon/2 < y_i (i = 0,1,\cdots,n)$$

这就是说,对于以 Y^* 为球心,$\varepsilon/2$ 为半径的球 $S(Y^*,\varepsilon/2)$内任一点 Y,都有 $Y \in E$。因此 Y^*是 E 的内点。所以集 E 在 R^{n+1}中存在内点。

(3)R^{n+1}中的坐标原点是集 E 的边界点。事实上,如果 R^{n+1}中的坐标原点不是 E 的边界点,则有 R^{n+1}中的点 $Y=(y_0,y_1,\cdots,y_n)$位于 E 中并且位于与第一象限对原点对称的象限中,即 $Y=\{-|y_i|\}$。若是存在点 $x \in X$,使得

$$-|y_i| \geq f_i(x) - f_i(x^0) (i = 0,1,\cdots,n)$$

则

$$f_i(x) \leq f_i(x^0) - |y_i| < f_i(x^0) \leq 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

因此 $x \in D$,并且 $f_0(x)<f_0(x^0)$。这与 x^0 是 $f_0(x)$在 D 上的极小元矛盾。所以 R^{n+1}中的坐标原点是 E 的边界点。并且每一分量为正的 $Y \in R^{n+1}$在集 E 中。依凸集的承托平面定理,存在通过空间 R^{n+1}的坐标原点的集 E 的承托平面,使得集 E 位于该承托平面的一侧。即是存在不全为零的常数 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$使得

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_i \geq 0 \quad \forall (y_0,y_1,\cdots,y_n) = Y \in E$$

特别地，空间 R^{n+1} 中的基向量

$$e_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0) \quad (i = 0,1,2,\cdots,n)$$

位于集合 E 中。因此，有 $\alpha_i \geqslant 0(i=0,1,\cdots,n)$，使得

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i [f_i(x) - f_i(x^0)] \geqslant 0 \quad \forall x \in E$$

即

$$\inf_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i(x^0)$$ 证毕

引理 3.4 设 $f_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 是 Hilbert 空间 X 上的连续凸泛函，并且在 $x^0 \in D$ 的某一邻域内存在 Fre'chet 导数。$x^0 \in D$ 使得 $f_i(x^0)=0(i=1,\cdots,q)$，$f_i(x^0)<0(i=q+1,\cdots,n)$。令 $a_i = f_i'(x^0)(i=0,1,\cdots,q)$，$f_i'(x^0)$ 表示泛函 $f_i(x)$ 在 x^0 点的 Fre'chet 导数。设 $a_1,a_2,\cdots,a_q$ 是空间 X 中的 q 个线性无关元，为了 x^0 是 $f_0(x)$ 在 D 上的极小元，必须且只须

$$A^{-1}f^0 \leqslant 0 \tag{3.1.21}$$

（符号“$\leqslant$”表示 R^q 中的向量 $A^{-1}f^0$ 的每一个分量非正）

$$\sum_{i=1}^{q} a_i \langle \beta_i, f^0 \rangle_{R^q} = a_0 \tag{3.1.22}$$

式中矩阵 $A=(a_{ij})$，$a_{ij}=\langle a_i,a_j\rangle_X$，$(i,j=1,2,\cdots,q)$，$\langle a_j,a_0\rangle_X = f_j^0$ $(j=1,\cdots,q)$，$f^0=(f_1^0,\cdots,f_q^0)^T$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11}, & \beta_{12}, & \cdots, & \beta_{1q} \\ \beta_{21}, & \beta_{22}, & \cdots, & \beta_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{q1}, & \beta_{q2}, & \cdots, & \beta_{qq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_q \end{bmatrix}$$

式中 $\beta_i = (\beta_{i1},\cdots,\beta_{iq})(i=1,2,\cdots,q)$

证 必要性 设 $x^0 \in D$ 是泛函 $f_0(x)$ 在 D 上的极小元。由引理 3.3，存在 $q+1$ 个常数 $\alpha_i \geqslant 0(i=0,1,\cdots,q)$，$\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_q>0$，使得

$$\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_q a_q = 0$$

由假设 X 中的 q 个元 $a_1,a_2,\cdots,a_q$ 是线性无关的，从而 $\alpha_0>0$。否

则由 $\alpha_0=0$ 及线性无关性得 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_q=0$，这与 $\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_q>0$ 矛盾。因此，不妨设 $\alpha_0=1$。于是

$$a_0+\alpha_1 a_1+\cdots+\alpha_q a_q=0$$

分别用 $a_1,a_2,\cdots,a_q$ 中的每一个元，于上式两端取内积得

$$\begin{aligned}
&\langle a_1,a_0\rangle+\alpha_1\langle a_1,a_1\rangle+\cdots+\alpha_q\langle a_1,a_q\rangle=0\\
&\langle a_2,a_0\rangle+\alpha_1\langle a_2,a_1\rangle+\cdots+\alpha_q\langle a_2,a_q\rangle=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\langle a_q,a_0\rangle+\alpha_1\langle a_q,a_1\rangle+\cdots+\alpha_q\langle a_q,a_q\rangle=0
\end{aligned}\tag{3.1.23}$$

用 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q)^T$ 表示 $n\times1$ 向量。则关于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q$ 的线性方程组(3.1.23)可写为

$$f^0+A\alpha=0$$

因此 $A^{-1}f^0=-\alpha\leqslant0$。这就是条件(3.1.21)。

改写式 $A^{-1}f^0+\alpha=0$ 为下面的形式

$$\langle\beta_j,f^0\rangle_{R^q}+\alpha_j=0\quad(j=1,\cdots,q)$$

从上式得

$$\begin{aligned}
0&=\sum_{j=1}^{q}a_j\langle\beta_j,f^0\rangle_{R^q}+\sum_{j=1}^{q}\alpha_j a_j\\
&=\sum_{j=1}^{q}a_j\langle\beta_j,f^0\rangle_{R^q}-a_0
\end{aligned}$$

这就证明了式(3.1.22)。

充分性　任一 $x\in D$，有

$$\langle f_i'(x^0),x-x^0\rangle_X\leqslant0\quad(i=1,\cdots,q)\tag{3.1.24}$$

事实上，如有某一个 i_1：$1\leqslant i_1\leqslant q$ 和某个 $x^*\in D$，使得

$$\langle f_{i_1}'(x^0),x^*-x^0\rangle_X>0$$

则由 $f_{i_1}(x^0)=0$ 和 $f_{i_1}(x)$ 的凸性得

$$\begin{aligned}
f_{i_1}(x^*)&\geqslant f_{i_1}(x^0)+\langle f_{i_1}'(x^0),x^*-x^0\rangle_X\\
&=\langle f_{i_1}'(x^0),x^*-x^0\rangle_X>0
\end{aligned}$$

这与 $x^*\in D$ 矛盾。因此式(3.1.24)成立。

设 $x^0\in D$ 满足条件(3.1.21)和(3.1.22)。令 $\alpha=-A^{-1}f^0$。由

条件(3.1.21)得 $a>0$。从 A^{-1}和 α 的定义有

$$\langle \beta_i, f^0\rangle_{R^q} = -\alpha_i \leqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,q) \qquad (3.1.25)$$

对任一 $x\in D$，用泛函 $f_0(x)$的凸性和式(3.1.24)、(3.1.25)及式(3.1.22)得

$$f_0(x)-f_0(x^0)\geqslant \langle a_0, x-x^0\rangle_X = \sum_{i=1}^{q} < a_i,$$

$$x-x^0>_X\langle \beta_i, f^0\rangle_{R^q}\geqslant 0$$

因此，x^0 是 $f_0(x)$在 D 上的极小元。 证毕

定理 3.2 为了 $u^*:\|u^*\|^2=M$ 是泛函 $J_0(u)$在 D_1上的极小元，必须且只须 $u^*(t,x)$是下面的偏微分方程和不等式的解

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)-C(x)y$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(n,x_i)+a(t,x)y=b(t,x)u^*(t,x)$$

$$y(t,x)|_{t=0}=0$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right)-C(x)\psi$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\cos(n,x_i)+a(t,x)\psi$$

$$=\int_\Gamma K(x,\xi)y(t,\xi,u^*)\mathrm{d}\xi+\gamma(t,x)$$

$$\psi(t,x)|_{t=T}=0$$

$$u^*(t,x)\int_0^T\int_\Gamma b(t,x)u^*(t,x)\psi^*(t,x,u^*)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$=Mb(t,x)\psi^*(t,x,u^*),\ a.e.\ (t,x)\in S(T)$$

$$\int_0^T\int_\Gamma b(t,x)u^*(t,x)\psi^*(t,x,u^*)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\beta M\leqslant 0$$

证 令 $f_1(u)=\|u\|^2-M$，$X=L^2(S(T))$

$$D_1=\{u\,|\,u\in X, f_1(u)\leqslant 0\}$$

$$f_0(u)=J_0(u)=\langle KK_1u, K_1u\rangle+2\langle \gamma, K_1u\rangle$$

$$+\beta\langle u,u\rangle$$

这样定义的泛函 $f_0(u)$、$f_1(u)$是空间 X 上的凸泛函，并且 $a_1=f_1'(u^*)=2u^*$，$a_0=f_0'(u^*)=2(K_1^*KK_1u+K_1^*\gamma+\beta u^*)$。依引理 3.4，有

$$\langle a_0,a_1\rangle = 4(\langle KK_1u^*+\gamma,K_1u^*\rangle+\beta M)\leqslant 0 \tag{3.1.26}$$

$$a_1\langle a_0,a_1\rangle = \|a_1\|^2a_0 = 4Ma_0 \tag{3.1.27}$$

式(3.1.27)写为

$$(\langle KK_1u^*+\gamma,K_1u^*\rangle)u^* = M(K_1^*KK_1u^*+K_1^*\gamma) \tag{3.1.28}$$

用算子 K 与 K_1 的定义，将引理 3.1 的结论改写为

$$\langle b\psi^s(u^*),u\rangle = \langle KK_1u^*+\gamma,K_1u\rangle \quad \forall\, u\in L^2(S(T))$$

于是得

$$b\psi^2(u^*) = K_1^*KK_1u^*+K_1^*\gamma$$

代入式(3.1.26)和式(3.1.27)得

$$\langle b\psi^s(u^*),u^*\rangle+\beta M\leqslant 0$$

$$\langle b\psi^s(u^*),u^*\rangle u^* = Mb\psi^s(u^*)$$

证毕

§3.2　具有时间性能指标的系统的最优控制

设 X 是自反的 Banach 空间，A 是 X 中的闭稠定线性算子，它生成强连续的线性算子半群$\{T_t;t\geqslant 0\}$。U 是 Banach 空间 Z 的闭紧集。$b(t,u)$是映$[0,\infty)\times U$ 到 X 的映射，它关于 t 强可测，关于 u 强连续，并且存在 Lebesgue 可积函数 $m(t)$，使得

$$\|b(t,u)\|\leqslant m(t),\forall\, u\in U$$

考虑在空间 X 中用发展方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax+b(t,u) \tag{3.2.1}$$

$$x(0) = x_0$$

描述的控制系统的时间最优控制问题。

令

$$U_{ad}=\{u(t)\mid u(t)\text{在}[0,t_1]\text{上强可测},u(t)\in U,a.e.t\in[0,t_1]\}$$

集 U_{ad} 称为容许控制类,U_{ad} 中的函数 $u(t)$ 称为容许控制。

对于每一 $u(\cdot)\in U_{ad}$,$b(t,u(t))$ 在 $[0,t_1]$ 上是强可测的函数。则方程(3.2.1)存在唯一弱解

$$x(t,u)=T_t x_0+\int_0^t T_{t-s}b(s,u(s))\mathrm{d}s \qquad (3.2.2)$$

方程(3.2.1)的所谓弱解 $x(t)$,$t\in[0,t_1]$ 是指:$x(t)$ 在区间 $[0,t_1]$ 上强连续,并且满足积分等式

$$\langle x(t),x\rangle=\langle x_0,x\rangle+\int_0^t\langle x(s),A^*x\rangle\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^t\langle b(s,u(s)),x\rangle\mathrm{d}s \quad \forall x\in D(A^*)$$
$$(3.2.3)$$

其中 $x\in D(A^*)$ 和元 $z\in X$,$\langle z,x\rangle$ 表示泛函 x 在点 z 的值。

对于 $u(\cdot)\in U_{ad}$,称式(3.2.2)的 $x(t,u)$ 为系统(3.2.1)的弱解,或相应于 u 的轨道。

设 $Q(t)$ 是空间 X 中的有界闭凸集,称为目标集。如果 $x_0\notin Q(t)$,并且存在 $u(\cdot)\in U_{ad}$ 和 $\hat{t}>0$,使得 $x(\hat{t},u)\in Q(\hat{t})$,但是当 $t\in(0,\hat{t})$ 时,$x(t,u)\notin Q(t)$,称 $\hat{t}$ 是系统(3.2.1)在控制 $u(\cdot)$ 作用下击中目标的时间。时间性能指标的最优控制问题是寻求控制 $u(\cdot)\in U_{ad}$ 使得 $t^*=\min\hat{t}$

给定 $t>0$,定义 X 中的集合

$$R(t)=\{x(t,u)\mid u(\cdot)\in U_{ad}\}$$

称 $R(t)$ 是系统(3.2.1)的等时区域。

当 U 是 Banach 空间 Z 中的凸集,$b(t,u)=B(t)u$ 时,$B(t)$:$U\to X$ 的线性算子。此时,等时区 $R(t)$ 显然是空间 X 中的凸集。在这一节中,我们不要求 U 是凸集,也不要求 $b(t,u)$ 关于 u 是线性的。但是可以证明等时区域 $R(t)$ 的闭包 $\overline{R(t)}$ 是闭凸集。为此,要用到关于矢值函数的积分方面的知识。

引理 3.5 设 $y(t)$是在 Banach 空间 X 中取值，在区间$[\alpha,\beta]$上 Bochner 可积的矢值函数。记

$$R([\alpha,\beta])=\left\{\int_E y(t)\mathrm{d}t \,\middle|\, E\subset[\alpha,\beta]\text{是 Lebesgue 可测子集}\right\}$$

则集 $R([\alpha,\beta])$的闭包$\overline{R([\alpha,\beta])}$是凸集。

证 依假设 $y(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上强可测，因此存在阶段矢值函数列$\{y_i(t)\}$使得

$$\|y_i(t)-y(t)\|\to 0\quad(i\to\infty)$$

对 $a.e.\ t\in[\alpha,\beta]$。

令

$$\mu(E)=\int_E y(t)\mathrm{d}t$$

$$\mu_i(E)=\int_E y_i(t)\mathrm{d}t(i=1,2,\cdots),\forall\ E\subset[\alpha,\beta]\text{ 可测子集}$$

则

$$\|\mu(E)-\mu_i(E)\|\leqslant\int_E\|y(t)-y_i(t)\|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\int_\alpha^\beta\|y(t)-y_i(t)\|\mathrm{d}t\to 0\quad(i\to\infty)$$

对$\forall\ E\subset[\alpha,\beta]$可测集一致地成立。

对任意的 $x,y\in\overline{R([\alpha,\beta])}$和任给 $\varepsilon>0$，存在 $E_x,E_y\subset[\alpha,\beta]$使得

$$\|x-\mu(E_x)\|<\varepsilon/3,\ \|y-\mu(E_y)\|<\varepsilon/3$$

对已给 $\varepsilon>0$，存在自然数 $N(\varepsilon)$，当 $i\geqslant N(\varepsilon)$时，成立

$$\|\mu(E)-\mu_i(E)\|<\varepsilon/3\quad\forall\ E\subset[\alpha,\beta]\text{ 可测集},$$

$$\|x-\mu_i(E_x)\|\leqslant\|x-\mu(E_x)\|+\|\mu(E_x)-\mu_i(E_x)\|$$
$$<2\varepsilon/3$$

$$\|y-\mu_i(E_y)\|\leqslant\|y-\mu(E_y)\|+\|\mu(E_y)-\mu_i(E_y)\|$$
$$<2\varepsilon/3$$

对每一个 i，$\mu_i(E)$是在 X 的一个有穷维子空间中取值的矢值测度。固定 $i=i_0\geqslant N(\varepsilon)$，依 Lyapunov 定理，矢值测度 $\mu_{i_0}(E)$的值

域是凸集。因此，对 $\lambda\in[0,1]$，存在可测子集 $E_\lambda\subset[\alpha,\beta]$ 使得 $\lambda\mu_{t_0}(E_x)+(1-\lambda)\mu_{t_0}(E_y)=\mu_{t_0}(E_\lambda)$。则

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y-\mu(E_\lambda)\|\leqslant\|\lambda x+(1-\lambda)y-\mu_{t_0}(E_\lambda)\|$$
$$+\|\mu_{t_0}(E_\lambda)-\mu(E_\lambda)\|\leqslant\lambda\|x-\mu_{t_0}(E_x)\|+(1-\lambda)\|y$$
$$-\mu_{t_0}(E_y)\|+\|\mu_{t_0}(E_\lambda)-\mu(E_\lambda)\|<\varepsilon$$

即 $\lambda x+(1-\lambda)y\in\overline{R([\alpha,\beta])}$。这就证明了集 $\overline{R([\alpha,\beta])}$ 是凸闭集。

证毕

定理 3.3 等时区 $R(t)$ 的闭包 $\overline{R(t)}$ 是凸闭集。

证 集 $R(t)$ 的闭包 $\overline{R(t)}$ 当然是闭集。下面要证 $\overline{R(t)}$ 是凸集。设 $\forall\ x_1,x_2\in\overline{R(t)}$，$0<\lambda<1$，要证 $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in\overline{R(t)}$。

对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $u_1(\cdot),u_2(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$\|x_1-x(t,u_1)\|<\varepsilon/2,\ \|x_2-x(t,u_2)\|<\varepsilon/2$$

因此

$$\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-\lambda x(t,u_1)-(1-\lambda)x(t,u_2)\|<\varepsilon/2 \tag{3.2.4}$$

矢值函数 $y(s)=T_{t-s}(b(s,u_1(s))-b(s,u_2(s)))$，在区间 $[0,t]$ 上是 Bochner 可积的。依引理 3.5，集

$$\left\{\int_E y(t)\mathrm{d}t\,\middle|\,\forall\ \text{可测子集}\ E\subset[0,t]\right\}$$

的闭包是凸集，从而存在可测子集 $E_\lambda\subset[0,t]$ 使得

$$\left\|\lambda\int_0^t y(s)\mathrm{d}s-\int_{E_\lambda}y(s)\mathrm{d}s\right\|<\varepsilon/2$$

由上述不等式和式(3.2.4)得

$$\left\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-T_tx_0-\int_0^t T_{t-s}b(s,u_2(s))\mathrm{d}s\right.$$
$$\left.-\int_{E_\lambda}T_{t-s}(b(s,u_1(s))-b(s,u_2(s)))\mathrm{d}s\right\|$$
$$\leqslant\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-\lambda x(t,u_1)-(1-\lambda)x(t,u_2)\|$$
$$+\left\|\lambda\int_0^t y(s)\mathrm{d}s-\int_{E_\lambda}y(s)\mathrm{d}s\right\|<\varepsilon$$

令

$$u_\lambda(s)=\begin{cases}u_1(s), 当\ s\in E_\lambda\\ u_2(s), 当\ s\in[0,t]\setminus E_\lambda\end{cases}$$

则 $u_\lambda(\cdot)\in U_{ad}$，并且

$$\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-x(t,u_\lambda)\|<\varepsilon$$ 证毕

令

$\hat{\mathscr{U}}=\{u(t)\mid u(t)$ 在 $[0,t_1]$ 上是阶段的矢值函数，$u(t)\in U$，$a.e.\ t\in[0,t_1]\}$

$$\hat{R}(t)=\{x(t,u)\mid u(\cdot)\in\hat{\mathscr{U}}\}$$

依定义，显然有

$$\hat{R}(t)\subset R(t)$$

引理 3.6 $\overline{R(t)}=\overline{\hat{R}(t)}\quad\forall\ t\geqslant 0$。

证 依定义，$\hat{R}(t)\subset\overline{R(t)}\subset\overline{R(t)}\Rightarrow\overline{\hat{R}(t)}\subseteq\overline{R(t)}$。下面要证明相反的包含式。设 $x\in R(t)$，存在 $u(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$x=T_t x_0-\int_0^t T_{t-s}b(s,u(s))\mathrm{d}s$$

矢值函数 $u(s)$ 是强可测的，存在阶段矢值函数列 $u_n(\cdot)\in\hat{\mathscr{U}}$ 使得

$$\|u_n(s)-u(s)\|\to 0(n\to\infty)\ 对\ a.e.\ s\in[0,t]$$

用关于 $b(t,u)$ 对变元 u 强连续的假设，得

$\|T_{t-s}(b(s,u_n(s))-b(s,u(s)))\|\to 0(n\to\infty)$，$a.e.\ s\in[0,t]$

由假设 $\|b(t,u)\|\leqslant m(t)\ \forall\ u\in U$，用控制收敛定理成立下式

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t T_{t-s}b(s,u_n(s))\mathrm{d}s=\int_0^t T_{t-s}b(s,u(s))\mathrm{d}s$$

所以 $x\in\overline{\hat{R}(t)}$。即是 $R(t)\subset\overline{\hat{R}(t)}$。故 $\overline{R(t)}\subseteq\overline{\hat{R}(t)}$ 这就证明了 $\overline{R(t)}=\overline{\hat{R}(t)}$。 证毕

设 $E\subset R^1_+=[0,\infty)$ 是一个 Lebesgue 测度有穷的集合。$L^1(E)=L^1$ 是一个 Banach 空间，它的对偶空间 $L^\infty(E)=(L^1(E))'$。在

空间 $L^\infty(E)$ 中弱 * 拓扑下的闭单位球是紧的，正锥是闭的。因此它们的交集

$$K = \{\phi \mid \phi \in L^\infty(E), 0 \leqslant \phi(x) \leqslant 1, a.e.\ x \in E\}$$

是凸紧集。

约定

$$K_0 = \{\chi_A \mid \forall \text{ 可测子集 } A \subseteq E, \chi_A \text{ 是集 } A \text{ 的示性函数}\}$$

则集 K 的极端点的全体的集合是 K_0。事实上，一方面，每一个可测子集 $A \subseteq E$ 的示性函数是集 K 的极端点。另一方面，如果 ϕ 不是几乎处处取值于 0 和 1，则存在 $\varepsilon > 0$ 和一个具有正测度的集 B，在集 B 上有 $\varepsilon \leqslant \phi(x) \leqslant 1-\varepsilon$。设 $\psi(x)$ 是集 B 的示性函数，则 $\phi \pm \varepsilon\psi \in K$，所以 ϕ 不可能是 K 的极端点。

设 M 是空间 L^1 的任一子集。任一可测集 $B \subset E$，记

$$M^\perp = \left\{\phi \mid \phi \in L^\infty(E), \int_E f\phi \mathrm{d}x = 0, \forall f \in M\right\}$$

$$M^\perp(B) = \{\phi \mid \phi \in M^\perp, \phi(x) = 0, a.e.\ x \in E \setminus B\}$$

则 $M^\perp$ 和每一个 $M^\perp(B)$ 是 L^∞ 的弱 * 的闭子空间。

如果对每一个具有正测度的集 $B \subseteq E$，$M^\perp(B)$ 不是 $L^\infty(E)$ 的零子空间，称 M 是薄的(thin)。

如果 N 是由 M 生成的闭子空间，N 是薄的当且仅当 M 是薄的。

设 M 是薄的，则 $K \subseteq K_0 + M^\perp$。事实上，让 $\phi_1 \in K$，则 $M^\perp$ 和 $\phi_1 + M^\perp$ 都是凸的和弱 * 闭的。因此 $K_1 = K \cap (\phi_1 + M^\perp)$ 是凸的和紧的。依 Krein-Milman 定理，存在 $\phi_0 \in K_1$ 是极端点。如果 ϕ_0 不是几乎处处取值 0 和 1，则存在 $\varepsilon > 0$ 和正测度的集 B，使得在集 B 上成立 $\varepsilon \leqslant \phi_0(x) \leqslant 1-\varepsilon$。由假设 M 是薄的，存在非零元 $\phi \in M^\perp(B)$ 和对足够小的 α，有 $|\alpha\phi(x)| \leqslant \varepsilon$。于是 $\phi_0 \pm \alpha\phi \in K_1$。这与 ϕ_0 是 K_1 的极端点相矛盾。因此 $\phi_0 \in K_0$。但是 $\phi_1 - \phi_0 \in M^\perp$，于是 $\phi_1 \in K_0 + M^\perp$。故 $K \subseteq K_0 + M^\perp$。

设 $E \subset R_+^1$ 是 Lebesgue 测度有穷的集。Y 是一个 Banach 空间，$y(\cdot): E \to Y$ 是 Bochner 可积的矢值函数。记

$$N = \{\langle y(t), y^*\rangle \mid \forall\, y^* \in Y^*\}$$

当 N 是 $L^1(E)$中的薄集时，称 $y(t)$在 E 上是薄的矢值函数。

引理 3.7 设 Y 是自反的 Banach 空间，$y(t)$在 E 上是薄的矢值函数，则

$$\left\{\int_E y(t)\phi(t)\mathrm{d}t \,\middle|\, \forall\ 0 \leqslant \phi(t) \leqslant 1, a.e.\, t \in E\right\}$$

$$= \left\{\int_A y(t)\mathrm{d}t \,\middle|\, \forall \text{ 可测集 } A \subset E\right\}$$

并且是凸的弱紧集。

证 设 u^* 是从 Y^* 到 $L^1(E)$的映射，它的定义如下，任一 $y^* \in Y^*$

$$u^*(y^*) = \langle y(t), y^*\rangle$$

u^*的伴随映射记为 $u: L^\infty(E) \to Y$。任一 $\phi \in L^\infty(E)$，则

$$u(\phi) = \int_E y(t)\phi(t)\mathrm{d}t$$

显然，集

$$u(K) = \left\{\int_E y(t)\phi(t)\mathrm{d}t \,\middle|\, 0 \leqslant \phi(t) \leqslant 1, a.e.\, t \in E\right\}$$

是 Y 中的凸集。

任一列$\{u_n\} \subset u(K)$，存在$\{\phi_n\} \subset K$，使得

$$u_n = \int_E \phi_n(t) y(t)\mathrm{d}t$$

由前述，集 K 在空间 $L^\infty(E)$的弱 * 拓扑意义下是紧集。因此，存在$\{\phi_n\}$的子列$\{\phi_{n_k}\}$和 $\phi_0 \in K$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \phi_{n_k}(t)\psi(t)\mathrm{d}t = \int_E \phi_0(t)\psi(t)\mathrm{d}t, \forall\, \psi \in L^1(E)$$

对任一 $y^* \in Y$，依定义和上式，有

$$\lim_{k\to\infty}\langle u_{n_k}, y^*\rangle = \lim_{k\to\infty}\int_E \phi_{n_k}(t)\langle y(t), y^*\rangle\mathrm{d}t$$

$$= \int_E \phi_0(t)\langle y(t), y^*\rangle\mathrm{d}t = \int_E \langle \phi_0(t) y(t), y^*\rangle\mathrm{d}t$$

依定义，有

$$\int_E \phi_0(t)y(t)\mathrm{d}t \in u(K)$$

所以集 $u(K)$是空间 Y 中的弱紧集。

映射 u 的核

$$u^{-1}(0) = \left\{\phi \middle| \int_E \phi(t)y(t)\mathrm{d}t = 0, \forall\ \phi \in L^\infty(E)\right\}$$

则 $u^{-1}(0)=N^\perp$

依定义，有下式

$$\left\{\int_A y(t)\mathrm{d}t \middle| \text{可测子集 } A \subset E\right\}$$

$$= \left\{\int_E y(t)\chi_A(t)\mathrm{d}t \middle| \chi_A \text{ 是集 } A \subset E \text{ 的示性函数}\right\}$$

$$= \left\{\int_A y(t)\chi(t)\mathrm{d}t \middle| \chi(\cdot) \in K_0\right\} = u(K_0)$$

由前面已证，$K \subseteq K_0 + N^\perp$，所以

$$u(K) \subseteq u(K_0 + N^\perp) = u(K_0 + u^{-1}(0))$$

$$= u(K_0) \subseteq u(K)$$

因此　$u(K)=u(K_0)$　　证毕

定理 3.4　给定 $t>0$，设对于 $\hat{\mathscr{U}}$ 中的任意两个元 u_1 和 u_2，在区间$[0,t]$上定义取值于 $X\times X$ 的矢值函数$(T_{t-s}b(s,u_1),T_{t-s}b(s,u_2))$是薄的，则集 $\dot{R}(t)$是凸集。

证　对任意两个控制 $u_1(\cdot),u_2(\cdot)\in\hat{\mathscr{U}}$，存在区间$[0,t]$的划分，$[0,t]=\bigcup_{j=1}^{k}E_j$，$E_i\cap E_j\neq\phi(i\neq j)$（这里 ϕ 是空集），并且当 $s\in E_j$，$u_1(s)=u_1^j$，$u_2(s)=u_2^j(j=1,2,\cdots,k)$。对任一可测子集 $A\subset[0,t]$，有

$$\int_A (T_{t-s}b(s,u_1(s)),T_{t-s}b(s,u_2(s)))\mathrm{d}s$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\int_{A\cap E_j}(T_{t-s}b(s,u_1^j),T_{t-s}b(s,u_2^j))\mathrm{d}s$$

依定理的条件和引理 3.7，集

$$\left\{\int_{A\cap E_t}(T_{t-s}b(s,u_1^*),T_{t-s}b(s,u_2^*))\mathrm{d}s \middle| A\subset[0,t]\text{ 是可测集}\right\}$$

$$=\left\{\int_B(T_{t-s}b(s,u_1^*),T_{t-s}b(s,u_2^*))\mathrm{d}s \middle| B\subset E_t\text{ 是可测集}\right\}$$

是空间 $X\times X$ 的凸弱紧集。因此集

$$\left\{\int_A(T_{t-s}b(s,u_1(s)),T_{t-s}b(s,u_2(s)))\mathrm{d}s \middle| A\subset[0,t],A\text{ 是可测集}\right\}$$

是空间 $X\times X$ 中的凸弱紧集。于是对于 $\lambda\in[0,1]$，存在可测集 $A_\lambda\subset[0,t]$，使得

$$\lambda\int_0^t(T_{t-s}b(s,u_1(s)),T_{t-s}b(s,u_2(s)))\mathrm{d}s$$

$$=\int_{A_\lambda}(T_{t-s}b(s,u_1(s)),T_{t-s}b(s,u_2(s)))\mathrm{d}s$$

即是

$$(1-\lambda)\int_0^t T_{t-s}b(s,u_2(s))\mathrm{d}s=\int_{[0,t]\setminus A_\lambda}T_{t-s}b(s,u_2(s))\mathrm{d}s$$

令

$$u_\lambda(s)=\begin{cases}u_1(s),\text{当 } s\in A_\lambda\\ u_2(s),\text{当 } s\in[0,t]\setminus A_\lambda\end{cases}$$

则 $u_\lambda(\cdot)\in\hat{\mathscr{U}}$。并且

$$\int_0^T T_{t-s}b(s,u_\lambda(s))\mathrm{d}s=\lambda\int_0^t T_{t-s}b(s,u_1(s))\mathrm{d}s$$

$$+(1-\lambda)\int_0^t T_{t-s}b(s,u_2(s))\mathrm{d}s\in\hat{R}(t)$$

这就证明了 $\hat{R}(t)$ 是凸集。 证毕

在定理 3.4 的条件下，等时区 $R(t)$ 满足下面的包含关系 $\hat{R}(t)\subset R(t)\subset\overline{\hat{R}(t)}$。

用类似于定理 3.4 的证明方法可得下面的定理。

定理 3.5 如果对于任意的两个容许控制 $u_1(\cdot),u_2(\cdot)\in U_{ad}$，在空间 $X\times X$ 中取值的矢值函数，$(T_{t-s}b(s,u_1(s)),T_{t-s}b(s,u_2(s)))$，$s\in[0,t]$ 是薄的，则集 $R(t)$ 是凸集。

为了讨论等时区 $R(t)$ 的连续性，记两个集 P 和 Q 的 Hausdorff 距离为

$$d(P,Q)=\frac{1}{2}\{\sup_{x\in P}\inf_{y\in Q}\|x-y\|+\sup_{x\in Q}\inf_{y\in P}\|x-y\|\}$$

如果等时区 $R(t)$ 满足条件

$$\lim_{\tau\to t}d(R(\tau),R(t))=0,\forall\, t\geqslant 0$$

称 $R(t)$ 关于 t 连续。

如果等时区 $R(t)$ 关于 t 连续，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $|t-\tau|<\delta(\varepsilon)$ 时，$R(\tau)\subset R(t)+S_\varepsilon$，$R(t)\subset R(\tau)+S_\varepsilon$，其中 $S_\varepsilon=\{x\,|\,x\in X,\|x\|<\varepsilon\}$

定理 3.6 等时区 $R(t)(t\geqslant 0)$ 关于 t 是连续的。

证 矢值函数 $f(t,x)=T_tx$ 关于 (t,x) 是连续的。因此，它在紧集 $[0,t_1]\times b([0,t_1],U)$ 上是一致连续的。于是，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $|t-\tau|<\delta(\varepsilon)$ 时

$$\|T_{t-s}b(s,u(s))-T_{\tau-s}b(s,u(s))\|<\varepsilon$$

下面的等式

$$\int_0^\tau T_{\tau-s}b(s,u(s))\mathrm{d}s-\int_0^t T_{t-s}b(s,u(s))\mathrm{d}s$$

$$=\int_t^\tau T_{\tau-s}b(s,u(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\{T_{\tau-s}b(s,u(s))-T_{t-s}b(s,u(s))\}\mathrm{d}s$$

的右端第二项的范数 $\leqslant t_1\varepsilon$。用关于 $b(t,u)$ 的假定

$$\|T_{t-s}b(s,u(s))\|\leqslant km(s)$$

因此上面的等式右端第一项的范数

$$\left\|\int_t^\tau T_{\tau-s}b(s,u(s))\mathrm{d}s\right\|\leqslant k\left|\int_t^\tau m(s)\mathrm{d}s\right|\to 0\quad(\delta\to 0)$$

所以上面等式左端

$$\left\|\int_0^\tau T_{\tau-s}b(s,u(s))\mathrm{d}s-\int_0^t T_{t-s}b(s,u(s))\mathrm{d}s\right\|$$

$$\leqslant t_1\varepsilon+k\left|\int_t^\tau m(s)\mathrm{d}s\right|\to 0(\varepsilon\to 0)$$

依等时区的定义和上式，有

$$R(\tau) \subset R(t) + S_\varepsilon, R(t) \subset R(\tau) + S_\varepsilon$$

即 $R(t)$ 关于 t 是连续的。 证毕

推论 3.3 等时区 $R(t)$ 的闭包 $\overline{R(t)}$ 关于 t 是连续的有界凸闭集。

为了讨论时间最优控制问题，我们先讨论两个连续的 $R_1(t)$ 和 $R_2(t) \subset X(t \geq 0)$ 的最速相遇问题。设 $R_1(0) \cap R_2(0) = \phi$，并且存在 $t > 0$，使得 $R_1(t) \cap R_2(t) \neq \phi$

令

$$t^* = \inf\{t \mid R_1(t) \cap R_2(t) \neq \phi\}$$

显然，当 $t \in [0, t^*]$ 时，$R_1(t) \cap R_2(t) = \phi$。但是 $R_1(t^*)$ 与 $R_2(t^*)$ 可能相交，也可能不相交。当 $R_1(t^*) \cap R_2(t^*) \neq \phi$ 时，称 t^* 为初遇时间，称 $R_1(t^*)$ 与 $R_2(t^*)$ 的公共点 x^* 为初遇点。如果 $R_1(t^*) \cap R_2(t^*) = \phi$，称初遇时间不存在。

定理 3.7 设 X 是自反的 Banach 空间，$R_1(t)$ 与 $R_2(t)$ 关于 t 连续，并且是凸集。对每一个 t，$R_1(t)$ 与 $R_2(t)$ 至少有一个是有界集，则初遇时间 t^* 存在。即 $R_1(t^*) \cap R_2(t^*) \neq \phi$

证 用 $f(t) = \rho(R_1(t), R_2(t))$ 表示两个集合 $R_1(t)$ 与 $R_2(t)$ 之间的距离。即

$$\rho(R_1(t), R_2(t)) = \inf_{\substack{x \in R_1(t) \\ y \in R_2(t)}} \| x - y \|$$

在定理的条件下，$R_1(t) \cap R_2(t) \neq \phi$，必须且只须 $f(t) = 0$。依定理的假设 $R_1(0) \cap R_2(0) = \phi$。因此 $f(0) > 0$，$f(t) = 0$。函数 $f(t)$ 关于 t 是连续的。则集

$$\{t \mid f(t) = 0, \forall\, t \geq 0\}$$

是有下界的非空闭集。令

$$t^* = \inf\{t \mid f(t) = 0, \forall\, t \geq 0\}$$

则 t^* 使得 $f(t^*) = 0$，这等价于 $R_1(t^*) \cap R_2(t^*) \neq \phi$。即 t^* 是初遇时间。 证毕

引理 3.8 设 X 是 Banach 空间，在 X 中的凸闭集 $U(t)(t \geq 0)$ 关于 t 是连续的，则 $U(t)$ 的补集 $U^c(t)$ 关于 t 也是连续的。

证 令

$$Q_\varepsilon = \{x \mid x \in X, \|x - y\| < \varepsilon, \forall y \in Q\}$$

用 ∂Q 表示集合 Q 的边界点的全体之集。易知，$Q_\varepsilon = Q \cup (\partial Q)_\varepsilon$ 和 $\partial Q^c = \partial Q$

依假设 $U(t)$ 关于 t 连续，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，当 $|t-\tau|<\delta(\varepsilon)$ 时，$U(t)\subset(U(\tau))_{\varepsilon/2}$，$U(\tau)\subset(U(t))_{\varepsilon/2}$。要证明 $U^c(t)\subset(U^c(\tau))_\varepsilon$。若不然，存在元 $x\in U^c(t)$，但是 $x\notin(U^c(\tau))_\varepsilon=U^c(\tau)\cup(\partial U^c(\tau))_\varepsilon=U^c(\tau)\cup(\partial U(\tau))_\varepsilon$。对该式两端取补集运算得 $x\in U(\tau)\setminus(\partial U(\tau))_\varepsilon$。由假设 $U(t)$ 是闭集，从 $x\in U^c(t)$ 可知 x 是 $U(t)$ 的外点。因此，$d=\rho(x, U(t))>0$。于是存在元列 $\{x_n\}\subset U(t)$，使得 $\|x_n-x\|\to d\ (n\to\infty)$，而 $\|x-x_n\|\geqslant d$。由不等式 $\|x_n\|\leqslant\|x-x_n\|+\|x\|$ 和极限 $\|x_n-x\|\to d\ (n\to\infty)$ 已知，存在正常数 $M>0$，使得 $\|x_n\|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$。

如果 $x_n+(1+\varepsilon d^{-1})(x-x_n)\in U(\tau)$，令 $\lambda_n=1+\varepsilon d^{-1}$。如果 $x_n+(1+\varepsilon d^{-1})(x-x_n)\notin U(\tau)$，则在 x 与 $x_n+(1+\varepsilon d^{-1})(x-x_n)$ 的连线上，必有一边界点 $x_n+k_n(x-x_n)\in U(\tau)$。由于 x 是 $U(\tau)$ 的内点，故 $k_n>1$。这时，令 $\lambda_n=k_n$。记 $y_n=x_n+\lambda_n(x-x_n)$。对于 $U(t)$ 中任意点 z 有

$$\begin{aligned}\|y_n - z\| &= \lambda_n\|x - ((1-\lambda_n^{-1})x_n + \lambda_n^{-1}z)\| \\ &\geqslant \lambda_n d\end{aligned}$$

在 $\lambda_n=1+\varepsilon d^{-1}$ 的情形，有 $\|y_n-z\|\geqslant\varepsilon+d$。于是有 $\rho(y_n, U(t))>\varepsilon$。在 $\lambda_n=k_n$ 的情形，y_n 是 $U(\tau)$ 的边界点，从 $x\notin(\partial U(\tau))_\varepsilon$ 可推出 $\|y_n-x\|\geqslant\varepsilon$。注意到 $\lambda_n=k_n>1$。故 $y_n-x_n=(\lambda_n-1)(x-x_n)$ 得

$$\lambda_n = 1 + \|x - x_n\|^{-1}\|y_n - x\| \geqslant 1 + \varepsilon\|x - x_n\|^{-1}$$

由此和前述不等式，得

$$\|y_n - z\| \geqslant \lambda_n d \geqslant d(1 + \varepsilon\|x - x_n\|^{-1})$$

因此

$$\rho(y_n, U(t)) \geqslant d(1 + \varepsilon\|x - x_n\|^{-1})$$

极限 $\|x_n-x\|\to d>0\ (n\to\infty)$，所以当 n 充分大时，仍成立 ρ

$(y_\tau, U(t)) > \varepsilon$。显然 $\rho(y_\tau, U(t)) > \varepsilon$，$y_\tau \in U(\tau)$ 与 $U(\tau) \subset (U(t))_\varepsilon$ 是矛盾的。同理可证 $U^c(t) \subset (U^c(t))_\varepsilon$。 证毕

定理 3.8 在定理 3.7 的条件下，初遇点 x^* 是 $R_1(t^*)$ 与 $R_2(t^*)$ 的公共边界点。

证 如果 x^* 是 $R_1(t^*)$ 的内点，记 $f(t,y) = \rho(y, R_1^c(t))$，$(t \geqslant 0, y \in X)$。依引理 3.8，$f(t,y)$ 关于 t,y 是连续函数，并且 $f(t^*, x^*) > 0$。依连续性，存在 $\delta > 0$，当 $|t - t^*| < \delta$，$\| y - x^* \| < \delta$ 时，$f(t,y) > 0$。从而球 $S(x^*, \delta) = \{y \mid \| y - x^* \| < \delta\} \subset R_1(t)$。依 $R_2(t)$ 的连续性，存在 $\delta_1 > 0 (\delta_1 < \delta)$，使得 $R_2(t^*) \subset R_2(t^* - \delta_1) + S_\delta$，这里球 $S_\delta = \{y \mid \| y \| < \delta\}$。点 $x^* \in R_2(t^*)$，存在 $x \in R_2(t^* - \delta_1)$，使得 $\| x - x^* \| < \delta$。于是 $x \in R_1(t^* - \delta)$。即 x 是集 $R_2(t^* - \delta_1)$ 与 $R_2(t^* - \delta_1)$ 的公共点。这与 t^* 的定义矛盾。所以 x^* 不能是 $R_1(t^*)$ 的内点，必是边界点。同理可证 x^* 是 $R_2(t^*)$ 的边界点。

证毕

推论 3.4 在定理 3.8 的条件下，X 中的零元 θ 是集合 $R(t^*) = R_1(t^*) - R_2(t^*) = \{x - y \mid x \in R_1(t^*), y \in R_2(t^*)\}$ 的边界点。

证 令 $R(t) = R_1(t) - R_2(t)$。显然 $\theta \notin R(0)$。但是 $\theta \in R(t)$。设 $U(\theta)$ 是 θ 的任一邻域，则存在 θ 的邻域 $u(\theta)$ 使得 $u(\theta) - u(\theta) \subset U(\theta)$。但是 $R_i(t)(i=1,2)$ 关于 t 连续，对于任意的 $t_0 \geqslant 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|t - t_0| < \delta (t \geqslant 0)$ 时，关系式

$$R_i(t) \subset R_i(t_0) + u(\theta) \quad (i = 1,2)$$

$$R_i(t_0) \subset R_i(t) + u(\theta) \quad (i = 1,2)$$

同时成立。

依 $R(t)$ 的定义和上面关系式，得

$$\begin{aligned} R(t) = R_1(t) - R_2(t) &\subset R_1(t_0) + u(\theta) - (R_2(t_0) + u(\theta)) \\ &\subset R(t_0) + U(\theta) \end{aligned}$$

同理可证，$R(t_0) \subset R(t) + U(\theta)$。因此，$R(t)$ 关于 t 连续。

其次，$R(t)$ 是凸闭集。$R(t)$ 的凸性是显然的。依假设，不妨设 $R_1(t)$ 是有界凸闭集。在自反的 Banach 空间中的有界凸闭集必是

弱紧集。对凸集，强闭与弱闭等价，故 $R_2(t)$ 是弱闭集。弱紧集与弱闭集的代数差必是弱闭集，于是 $R(t)$ 是弱闭凸集。因此，$R(t)$ 是凸闭集。应用定理 3.8 于集 $\{\theta\}$ 与 $R(t)$，得 θ 是 $R(t^*)$ 的边界点。

证毕

从上面的证明可以看出，当 X 是 Banach 空间，如果 $R_1(t)$ 与 $R_2(t)$ 之一是紧凸集，另一个是凸闭集，则零元 θ 是 $R_1(t^*)-R_2(t^*)$ 的边界点。

特别是当 $R_1(t)$ 与 $R_2(t)$ 是 n 维欧几里得空间 R^n 中关于 t 连续变动的有界凸闭集时，存在 $t>0$，使得 $R_1(t)\cap R_2(t)\neq\phi$，则初遇时间存在，并且存在非零矢量 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)\in R^n$，使得

$$\min_{x\in R_1(t^*)}\sum_{i=1}^{n}f_ix_i=\sum_{i=1}^{n}f_ix_i^*=\max_{y\in R_2(t^*)}\sum_{i=1}^{n}f_iy_i$$

其中 $(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$ 是初遇点。

在有穷维空间的情形，并不要求 $R_1(t^*)$ 与 $R_2(t^*)$ 有内点。因为在有穷维空间中，凸闭集的边界点必是支承点。但是在无穷维空间中，凸集的边界点不一定是支承点。当 $R_1(t^*)$ 或 $R_2(t^*)$ 之一有内点时，$R(t^*)$ 含有内点，θ 是 $R(t^*)$ 的边界点也是支承点。

定理 3.9 设 X 是自反的 Banach 空间，$R_1(t)$ 与 $R_2(t)$ 是关于 t 连续的有界凸闭集，则函数

$$g(t)=\max_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}}\min_{z\in R(t)}\langle z,f\rangle \tag{3.2.5}$$

(其中 $R(t)=R_1(t)-R_2(t)$)

是 t 的连续函数，而初遇时间 t^* 是方程

$$g(t)=0 \tag{3.2.6}$$

的最小正根。存在非零连续线性泛函 $f\in X^*$，使得

$$g(t^*)=\min_{z\in R(t^*)}\langle z,f\rangle=0$$

必须且只须零点 θ 是 $R(t^*)$ 的支承点。

证 由假设 X 是自反的，它的有界凸闭集是弱紧集。$\langle z,f\rangle$ 关于弱极限是连续的，所以 $\langle z,f\rangle$ 在 $R(t)$ 上的极小值存在。又 $\langle z,f\rangle$ 关于 f 是弱 * 连续的，所以

$$\min_{z \in R(t)} \langle z, f \rangle$$

关于 f 是弱 * 半连续的。它在弱 * 紧集 $\{f \mid \|f\| \leqslant 1\}$ 上达到极大值。因此 $g(t)$ 是有定义的。

令

$$E(t) = \{\langle z, f \rangle \mid \|f\| \leqslant 1, z \in R(t)\}$$

$$F(t) = \{\min_{z \in R(t)} \langle z, f \rangle \mid \|f\| \leqslant 1\}$$

集 $R(t)$ 关于 t 连续，对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $|t-\tau|<\delta(\varepsilon)$ 时，集 $E(t)$ 与 $E(\tau)$ 的 Hausdorff 距离 $d(E(t), E(\tau))<\varepsilon/4$。集 $E(t)$ 与 $E(\tau)$ 是两个实数集，所以对任意 $f \in X^*$、$\|f\| \leqslant 1$，成立

$$\left|\min_{z \in R(t)} \langle z, f \rangle - \max_{z \in R(\tau)} \langle z, f \rangle\right| < \varepsilon/2$$

因此集 $F(t)$ 与 $F(\tau)$ 的 Hausdorff 距离小于 $<\varepsilon/2$，于是

$$\left|\max_{\|f\| \leqslant 1} \min_{z \in R(t)} \langle z, f \rangle - \max_{\|f\| \leqslant 1} \min_{z \in R(\tau)} \langle z, f \rangle\right| < \varepsilon$$

即

$$|g(t) - g(\tau)| < \varepsilon$$

所以，$g(t)$ 是 t 的连续函数。

当 $t \in [0, t^*]$ 时，$\theta \notin R(t)$，依 Mazur 定理，存在 $f_0 \in X^*$，$\|f_0\| = 1$，使得

$$\min_{z \in R(t)} \langle z, f_0 \rangle > 0$$

更有 $g(t)>0$。当 $t=t^*$ 时，$\theta \in R(t^*)$。所以，对任意的 $f \in X^*$，$\|f\| = 1$，有

$$\min_{z \in R(t^*)} \langle z, f \rangle \leqslant \langle \theta, f \rangle = 0$$

于是 $g(t^*) \leqslant 0$。从 $g(t)$ 的连续性可知，$g(t^*) = 0$。即 t^* 是方程 (3.2.6) 的最小正根。　　证毕

有了这些准备以后，现在我们回到本节开始叙述的时间最优控制问题。系统 (3.2.1) 的轨道最快的击中目标 $Q(t)$ 的时间最优控制，就是等时区 $R(\tau)$ 与目标 $Q(t)$ 最快相遇问题。在无穷维的 Banach 空间中，$R(t)$ 一般不是凸闭集，所以我们讨论 $\overline{R(t)}$ 与 $Q(t)$ 最快相遇问题。称 $\overline{R(t)}$ 与 $Q(t)$ 的初遇时间 t^* 为 $R(t)$ 与 $Q(t)$ 的近似初遇时间，称 $\overline{R(t^*)} \cap Q(t^*)$ 中的元 x^* 为近似初遇点。如果存在

$u^*(\cdot)\in U_{ad}$，使得 $x^*=x(t^*,u^*)$，则近似初遇时间就是最优时间，$u^*(\cdot)$就是最优控制。

定理 3.10 设 $b(t,u)$关于(t,u)是强连续的，则系统(3.2.1)与目标集 $Q(t)$的近似初遇时间 t^* 是方程

$$g(t)=0$$

的最小正根。

其中

$$g(t)=\max_{\|f\|\leqslant 1}\left\{\min_{x\in Q(t)} f(x)-f(T_t x_0)\right.$$
$$\left.-\int_0^t \max_{u\in U} f(T_{t-s}b(s,u))\mathrm{d}s\right\} \qquad (3.2.7)$$

证 依推论 3.3，等时区域 $R(t)$的闭包$\overline{R(t)}$是关于 t 连续的凸闭集。$Q(t)$是关于 t 连续的有界凸闭集。依定理 3.9，$\overline{R(t)}$与 $Q(t)$的初遇时间 t^* 是方程

$$g(t)=\max_{\|f\|\leqslant 1}\min_{z\in Q(t)-\overline{R(t)}}\langle z,f\rangle=0$$

的最小正根。依 $g(t)$的表达式，有

$$g(t)=\max_{\|f\|\leqslant 1}\{\min_{x\in Q(t)}\langle x,f\rangle-\max_{y\in\overline{R(t)}}\langle y,f\rangle\}$$

泛函$\langle y,f\rangle$关于 y 连续，$\overline{R(t)}$是有界凸闭集，于是有下式

$$\max_{y\in\overline{R(t)}}\langle y,f\rangle=\sup_{y\in R(t)}\langle y,f\rangle=f(T_t x_0)$$
$$+\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}}\int_0^t f(T_{t-s}b(s,u(s)))\mathrm{d}s$$

依上式，函数 $g(t)$可写为

$$g(t)=\max_{\|f\|\leqslant 1}\left\{\min_{x\in Q(t)}\langle x,f\rangle-f(T_t x_0)\right.$$
$$\left.-\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}}\int_0^t f(T_{t-s}b(s,u(s)))\mathrm{d}s\right\}$$

令

$$M(s)=\max_{u\in U} f(T_{t-s}b(s,u))$$

函数 $f(T_{t-\cdot}b(\cdot,\cdot))$在紧集$[0,t]\times U$ 上是连续的，因此是一致连续的，所以 $M(s)$在$[0,t]$上是连续的。下面要证

$$\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}}\int_0^t f(T_{t-s}b(s,u(s)))\mathrm{d}s=\int_0^t M(s)\mathrm{d}s \qquad (3.2.8)$$

显然式(3.2.8)的左端不大于右端。对于任给 $\varepsilon>0$ 和 $\bar{s}\in[0,t]$，存在 $u_{\bar{s}}\in U$，使得

$$M(\bar{s})-\varepsilon<f(T_{t-\bar{s}}b(\bar{s},u_{\bar{s}}))$$

函数 $f(T_{t-s}b(s,u))$ 和 $M(s)$ 关于 s 是连续的，存在 $\bar{s}$ 的邻域 $O(\bar{s})=\{s\mid|s-\bar{s}|<\delta_{\bar{s}},s\in[0,t]\}$，使得当 $s\in O(\bar{s})$ 时，有

$$M(s)-\varepsilon<f(T_{t-s}b(s,u_{\bar{s}}))$$

因为 $[0,t]\subset\bigcup_{\bar{s}\in[0,t]}O(\bar{s})$，依 Borel 的有穷覆盖定理，存在有穷个邻域 $O(\bar{s}_1),\cdots,O(\bar{s}_k)$，使得 $[0,t]\subset\bigcup_{i=1}^{k}O(\bar{s}_i)$。

令

$$u_0(s)=u_{\bar{s}_l},\text{当 } s\in O(\bar{s}_l)\setminus\bigcup_{i=1}^{l-1}O(\bar{s}_i),(l=1,2,\cdots,k)$$

则 $u_0(\cdot)\in U_{ad}$。并且当 $s\in[0,t]$ 时，有

$$M(s)-\varepsilon<f(T_{t-s}b(s,u_0(s)))$$

上式两端对 s 积分得

$$\int_0^t M(s)\mathrm{d}s-\varepsilon t<\int_0^t f(T_{t-s}b(s,u_0(s)))\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}}\int_0^t f(T_{t-s}b(s,u(s)))\mathrm{d}s$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性得

$$\int_0^t M(s)\mathrm{d}s\leqslant\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}}\int_0^t f(T_{t-s}b(s,u(s)))\mathrm{d}s$$

这就证明了式(4.8)。 证毕

定理 3.11 设时间最优控制 $u^*(\cdot)\in U_{ad}$ 存在，并且原点 0 是 $Q(t^*)-\overline{R(t^*)}$ 的支承点，则存在 $f\in X^*$，$\|f\|=1$，使得

$$\max_{u\in U}f(T_{t^*-s}b(s,u))=f(T_{t^*-s}b(s,u^*(s)))a.e.\ s\in[0,t^*] \qquad (3.2.9)$$

如果 $x^*+\varepsilon\Delta z\in Q(t^*)$，$\varepsilon>0$，则成立

$$f(\Delta z)\geqslant 0 \qquad (3.2.10)$$

证 由假设原点 θ 是 $Q(t^*)-\overline{R(t^*)}$ 的支承点，依定理 3.9，存在 $f\in X^*$，$\|f\|=1$，使得

$$\min_{z\in Q(t^*)-\overline{R(t^*)}} f(z)=0$$

由此得到

$$\min_{y\in Q(t^*)} f(y)=\max_{x\in \overline{R(t^*)}} f(x)=\sup_{x\in R(t^*)} f(x) \qquad (3.2.11)$$

由假设最优控制 $u^*(\cdot)$ 存在，所以存在 $x^*\in Q(t^*)\cap R(t^*)$。即 $x^*\in Q(t^*)$ 和

$$x^*=T_{t^*}x_0+\int_0^{t^*} T_{t^*-s}b(s,u^*(s))\mathrm{d}s$$

依式(3.2.11)得

$$f(x^*)=\sup_{x\in R(t^*)} f(x)=f(T_{t^*}x_0)$$

$$+\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}}\int_0^{t^*} f(T_{t^*-s}b(s,u(s)))\mathrm{d}s$$

$$=f(T_{t^*}x_0)+\int_0^{t^*}\max_{u\in U} f(T_{t^*-s}b(s,u))\mathrm{d}s$$

$$=f(T_{t^*}x_0)+\int_0^{t^*} f(T_{t^*-s}b(s,u^*(s)))\mathrm{d}s$$

这就得到

$$\int_0^{t^*} f(T_{t^*-s}b(s,u^*(s)))\mathrm{d}s=\int_0^{t^*}\max_{u\in U} f(T_{t^*-s}b(s,u))\mathrm{d}s$$

显然，有不等式

$$\max_{u\in U} f(T_{t^*-s}b(s,u))\geqslant f(T_{t^*-s}b(s,u^*(s)))$$

所以式(3.2.9)在$[0,t^*]$上几乎处处成立。

如果 $x^*+\varepsilon\Delta x\in Q(t^*)$，则

$$f(x^*+\varepsilon\Delta x)\geqslant\min_{y\in Q(t^*)} f(y)=f(x^*)$$

因此式(3.2.10)成立。 证毕

推论 3.5 假设算子 A 生成解析算子半群$\{T_t;t\geqslant 0\}$。在定理 3.11 的条件下，则方程

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} = A^* p \quad s \in [0,t^*) \tag{3.2.12}$$

$$p(t^*) = f$$

的解 $p(s), s\in[0,t^*]$使得

$$\max_{u\in U}\langle p(s), b(s,u)\rangle = \langle p(s), b(s,u^*(s))\rangle \quad a.e.\ s\in[0,t^*]$$

并且

$$\langle p(t^*), \Delta z\rangle \geqslant 0$$

证 发展方程(3.2.12)的解为

$$p(s) = T^*_{t^*-s} f$$

其中 T_t^* 表示有界线算子 T_t 的伴随算子。从定理 3.11 得推论成立。 证毕

当 Banach 空间 X 是无穷维空间时，如果 $Q(t)$是凸体，则原点 θ 是集 $Q(t^*)-\overline{R(t^*)}$的支承点，从而式(3.2.9)、(3.2.10)成立。

现在我们将上述结果应用到偏微分方程描述的边界控制系统的时间最优控制问题。

设 Ω 是 $n(n\geqslant 2)$维欧氏空间 R^n 中的有界开域，Ω 的边界 Γ 是 $n-1$ 维的 C^2 类流形，Ω 局部地位于 Γ 的一侧，$Q_T=(0,T)\times\Omega$，$S=(0,T)\times\Gamma$，$a_{ij}(t,x)=a_{ji}(t,x)\in L^\infty(\overline{Q}_T)(i,j=1,\cdots,n)$，并且存在正常数 α_0，使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha_0\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \quad \forall\ (t,x)\in\overline{Q},(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in R^n \tag{3.2.13}$$

考察用抛物型偏微分方程描述的控制系统

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) + f(t,x) \quad (t,x)\in Q_T \tag{3.2.14}$$

边界条件为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(n,x_i) = u(t,x) \quad (t,x)\in S \tag{3.2.15}$$

初始条件为

$$y(t,x)|_{t=0}=y_0(x) \tag{3.2.16}$$

其中,n 是 Γ 上的单位内法向量;$f(\cdot,\cdot)\in L^2(Q)$,$y_0(\cdot)\in L^2(\Omega)$;$u(t,x)$是控制函数。

令 $w=ye^{-a_1t}$,则方程(3.2.14)可写为

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)-a_1w+e^{a_1t}f(t,x)$$

不失一般性,论讨的偏微分方程具有如下形式

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)-a_1y+f(t,x) \tag{3.2.17}$$

对任一 $w(\cdot)\in H^1(\Omega)$,用 $w(x)$乘方程(3.2.17)的两端后,在 Ω 上积分,用 Green 公式得

$$\int_\Omega\frac{\partial y}{\partial t}w\mathrm{d}x=\int_\Gamma\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(n,x_i)w(x)\mathrm{d}x$$

$$-a_1\int_\Omega yw\mathrm{d}x-\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}\mathrm{d}x+\int_\Omega fw\mathrm{d}x$$

(3.2.18)

在 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$上定义双线性型

$$a(t,w,v)=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\mathrm{d}x+a_1\int_\Omega wv\mathrm{d}x$$

$$\times\ \forall w,v\in H^1(\Omega),t\in[0,T]$$

则存在与 t,w,v 无关的正常数 M,使得

$$|a(t,w,v)|\leqslant M\|w\|_1\|v\|_1\quad\forall w,v\in H^1(\Omega)$$

这里 $\|\cdot\|_1$ 是空间 $H^1(\Omega)$中的范数。

从上面的不等式知道,$a(t,w,v)$对每一个 $t\in[0,T]$是 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 上的连续双线性泛函。存在 $A(t)\in\mathscr{L}(H^1(\Omega),(H^1(\Omega))')$,使得

$$a(t,w,v)=\langle A(t)w,v\rangle\quad\forall w,v\in H^1(\Omega)$$

其中$(H^1(\Omega))'$是空间 $H^1(\Omega)$的对偶空间。由条件(3.2.13)得

$$\langle A(t)w,w\rangle\geqslant a_2\|w\|_1^2\quad\forall w\in H^1(\Omega)\quad t\in[0,T]$$

其中 α_2 是正常数。

任一 $w(\cdot)\in H^1(\Omega)$，函数 $w(x)$ 在 Γ 上的迹记为 $w|_\Gamma$。依迹定理，这就定义了一个从空间 $H^1(\Omega)\to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 的有界线性算子 $B_0\in\mathscr{L}(H^1(\Omega),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$，$B_0w=w|_\Gamma\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$。$B_0$ 的伴随算子 $B=(B_0)^*$：$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\to(H^1(\Omega))'$ 是有界线性算子。如果 $u(\cdot)\in L^2(\Gamma)\subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，对任一 $w\in H^1(\Omega)$，则

$$\langle Bu,w\rangle=\langle u,B_0w\rangle=\int_\Gamma u(x)w(x)\mathrm{d}x$$

在上述记号下，式(3.2.18)可写为

$$\langle\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},w\rangle+\langle A(t)y,w\rangle=\langle Bu(t),w\rangle+\langle f,w\rangle\quad\forall\ w\in H^1(\Omega)$$

依上所述，偏微分方程(3.2.17)、(3.2.15)、(3.2.16)的边值—初值问题可以写为空间 $(H^1(\Omega))'$ 中的 Lions 型发展方程的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+A(t)y=Bu(t)+f(t)\qquad(3.2.19)$$

$$y(0)=y_0$$

现在来考虑控制系统(3.2.19)的时间最优控制问题。设 $U(t)$ 是空间 $L^2(\Gamma)$ 中的闭紧集，并且关于 t 连续变动。令

$$U_{ad}=\{u(t,x)|u(t,\cdot)\in U(t)\}$$

设 $y_1(\cdot)\in L^2(\Omega)$，$d>0$ 是一个常数。系统(3.2.19)的时间最优控制问题是：寻求一个 $u^*(\cdot,\cdot)\in U_{ad}$，相应于 $u^*(\cdot,\cdot)$ 的系统(3.2.19)的解 $y(t,u^*)$ 以最短的时间 t^*，使得

$$y(t^*,u^*(\cdot))\in S(y_1,d)=\{z(\cdot)|z(\cdot)\in L^2(\Omega),\|z(\cdot)-y_1(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant d\}$$

定理 3.12 设 $U(t)=U$ 不依赖于时间，如果系统(3.2.19)的时间最优控制 $u^*(t)=u^*(t,\cdot)\in U_{ad}$，存在 t^* 是最优时间，$y^*=y(t^*,u^*)$ 是相应于 u^* 的方程(3.2.19)的解 $y(t,u^*)$，在 $t=t^*$ 的状态。则存在 $z^*\in L^2(\Omega)$，使得偏微分方程

$$-\frac{\partial p}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)-\alpha_1 p(t,x)\in Q_{t^*}$$

(3.2.20)

边界条件

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial p}{\partial x_j}\cos(\boldsymbol{n},x_i)=0 \quad (t,x)\in S \qquad (3.2.21)$$

终值条件

$$p(t^*,x)=y_1(x)-z^*(x) \qquad (3.2.22)$$

的解 $p(t,x)$,$x\in\Omega$,$t\in[0,t^*]$,满足下式

$$\max_{u(\cdot)\in U}\int_{\Gamma} p(t,x)u(x)\mathrm{d}x=\int_{\Gamma} p(t,x)u^*(t,x)\mathrm{d}x$$

证 依推论 3.3,系统(3.2.19)的等时区 $R(t)$的闭包$\overline{R(t)}$是$L^2(\Omega)$中的闭凸集。因为目标集 $S(y_1,d)$是凸体。依定理 3.8,z^*是 $S(y_1,d)$与$\overline{R(t^*)}$的公共边界点,并且原点 0 是凸集 $S(y_1,d)-\overline{R(t^*)}$的支承点。依定理 3.9,存在 $p^*(\cdot)\in L^2(\Omega)$,$p^*\neq 0$,使得

$$\min_{z\in S(y_1,d)}\langle p^*,z\rangle-\max_{y\in \overline{R(t^*)}}\langle p^*,y\rangle=0$$

即

$$\min_{z\in S(y_1,d)}\langle p^*,z\rangle=\langle p^*,z^*\rangle=\max_{y\in \overline{R(t^*)}}\langle p^*,y\rangle \qquad (3.2.23)$$

$$=\max_{y\in R(t^*)}\langle p^*,y\rangle$$

由式(3.2.23)的左端等式,有

$$\langle p^*,z-z^*\rangle\geqslant 0,\forall\ z\in S(y_1,d)$$

所以 p^*与 y_1-z^*方向一致,即是 $p^*=\lambda(y_1-z^*)$,$\lambda>0$。不妨取 $p^*=y_1-z^*$,这就是式(3.2.22)。

依 z^*的定义,有

$$z^*=U(t^*,0)y_0+\int_0^{t^*}U(t^*,s)f(s)\mathrm{d}s+\int_0^{t^*}U(t^*,s)Bu^*(s)\mathrm{d}s$$

$$y(t^*,u)=U(t^*,0)y_0+\int_0^{t^*}U(t^*,s)f(s)\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^{t^*}U(t^*,s)Bu(s)\mathrm{d}s$$

将这两个表达式代入式(3.2.23)的右端等式,得

$$\langle p^*, \int_0^{t^*} U(t^*,s)Bu^*(s)\mathrm{d}s\rangle$$

$$\geqslant \langle p^*, \int_0^{t^*} U(t^*,s)Bu(s)\mathrm{d}s\rangle, \forall\ u(\cdot) \in U_{ad} \quad (3.2.24)$$

其中 $U(t,s)$ 是由 $A(t)$ 定义的基本解算子。

设 $u_j \in U$，列 $\{u_j\}$ 在 U 中稠密。考虑函数

$$\langle p^*, U(t^*,s)Bu^*(s)\rangle \text{ 与 } \langle p, U(t^*,s)Bu_j\rangle (j = 1,2,\cdots)$$

的公共 Lebesgue 点的全体的集合 E。则集 E 的 Lebesgue 测度 $\text{mes}\ E = t^*$。如果 $s_0 \in E$，$\varepsilon > 0$ 是任意的。令

$$u(s) = \begin{cases} u_j, & \text{当 } s \in [0,t^*], |s - s_0| \leqslant \varepsilon \\ u^*(s), & \text{当 } |s - s_0| > \varepsilon \end{cases}$$

则 $u(\cdot) \in U_{ad}$

从不等式(3.2.24)，将 $u(s)$ 代入，得

$$\int_{s_0-\varepsilon}^{s_0+\varepsilon} \langle p^*, U(t^*,s)Bu^*(s)\rangle \mathrm{d}s$$

$$\geqslant \int_{s_0-\varepsilon}^{s_0+\varepsilon} \langle p^*, U(t^*,s)Bu_j\rangle \mathrm{d}s$$

上述不等式两端以 2ε 除后，令 $\varepsilon \to 0$，得

$$\langle p^*, U(t^*,s_0)Bu^*(s_0)\rangle \geqslant \langle p^*, U(t^*,s_0)Bu_j\rangle$$

由于 $\{u_j\}$ 在 U 中稠密，所以

$$\sup_{u \in U} \langle p^*, U(t^*,s_0)Bu\rangle \leqslant \langle p^*, U(t^*,s_0)Bu^*(s_0)\rangle$$

这就得到

$$\max_{u \in U} \langle p^*, U(t^*,s)Bu\rangle = \langle p^*, U(t^*,s)Bu^*(s)\rangle a.e.\ s \in [0,t^*]$$

$$(3.2.25)$$

令

$$p(s) = U^*(t^*,s)p^*$$

则

$$p(t^*) = p^* = y_1 - z^*$$

并且 $p(s)$ 满足发展方程

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}=A^*(s)p$$

换言之，$p(t)=p(t,\cdot)$满足偏微分方程(3.2.20)、(3.2.21)和(3.2.22)，在上述记号下，式(3.2.25)可写为

$$\max_{u\in U}\int_{\Gamma}p(t,x)u(x)\mathrm{d}x=\int_{\Gamma}p(t,x)u^*(t,x)\mathrm{d}x\quad a.e.\ t\in[0,t^*]$$

这就证明了定理。 证毕

§3.3 非线性系统的最优控制

假定 H 和 U 是两个实的 Hilbert 空间，$U_{ad}\subset U$ 是一子集，$g(t,x,u)$，$f(t,x,u)$和 $h(x)$是三个映射：

$$g(\cdot,\cdot,\cdot):[0,T]\times H\times U_{ad}\to H$$

$$f(\cdot,\cdot,\cdot):[0,T]\times H\times U_{ad}\to R^1$$

$$h(\cdot):H\to R^1$$

对于每一 $t\in[0,T]$，$A(t)$是空间 H 中的线性算子。考虑用半线性发展方程描述的系统的最优控制问题。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+A(t)x=g(t,x,u)\quad t\in(0,T]\tag{3.3.1}$$

$$x(0)=x_0$$

受控系统(3.3.1)的性能指标为

$$J(u(\cdot))=\int_0^T f(t,x(t),u(t))\mathrm{d}t+h(x(T))\tag{3.3.2}$$

容许控制类

$\mathscr{U}_{ad}=\{u(t)\ u(\cdot):[0,T]\to U_{ad}$，$u(t)$在区间$[0,T]$上是有界可测的 Bochner 可积的$\}$

问题是寻求一个容许控制 $u^*(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，使得

$$J(u^*(\cdot))=\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}}J(u(\cdot))$$

容许控制类 $\mathscr{U}_{ad}$ 中的每一个 $u(t)$称为容许控制。$u^*(\cdot)$称为最优控制问题(3.3.1)—(3.3.2)的最优控制。相应于任一容许控

制 $u(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$ 的方程(3.3.1)的解称为容许轨道。相应于最优控制 $u^*(t)$ 的方程(3.3.1)的解 $x^*(t),t\in[0,T]$ 称为最优轨道。

设 H 和 V 是两个可分的 Hilbert 空间,$V\subset H$,V 在 H 中稠密,从 V 到 H 的自然嵌入算子是连续的。让空间 H 的对偶空间同于它自己,V 的对偶空间用 V' 表示。于是 $H\subset V'$,H 在 V' 中稠密,从 H 到 V' 的自然嵌入算子是连续的。空间 H,V,V' 中的范数分别用 $|\cdot|$, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_*$ 表示,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 V 和 V' 的对偶积。

为了讨论问题,我们需要作如下假定:

(A_1) $\forall t\in[0,T],A(t)\in\mathscr{L}(V,V')$,存在正常数 α,M,k 和 $\lambda\geqslant0,\rho\in\left(\frac{1}{2},1\right]$,使得

$$\langle A(t)x,x\rangle+\lambda|x|^2\geqslant\alpha\|x\|^2,\forall x\in V$$

$$|\langle A(t)x,y\rangle|\leqslant M\|x\|\ \|y\|,\forall x,y\in V$$

$$|\langle A(t)x,y\rangle-\langle A(s)x,y\rangle|\leqslant k|t-s|^\rho\|x\|\ \|y\|,\forall s,t$$

$\in[0,T],\forall x,y\in V$。

(A_2) $g(\cdot,\cdot,\cdot):[0,T]\times H\times U_{ad}\to H$ 连续,$g(t,x,u)$ 关于 x 是 Gâteaux 可微的,Gâteaux 导数 $g_x(t,x,u)$ 关于 (x,u) 连续和 $|g_x(t,x,u)|\leqslant g_0$,$g_0$ 是正常数。

(A_3) $f(\cdot,\cdot,\cdot):[0,T]\times H\times U_{ad}\to R^1$ 连续,$f(t,x,u)$ 关于 x 是 Gâteaux 可微的,Gâteaux 导数 $f_x(t,x,u)$ 关于 (x,u) 连续。

(A_4) $h(\cdot):H\to R^1$ 连续,$h(x)$ 的 Gâteaux 导数 $h_x(x)$ 关于 x 连续。

引理 3.9 设算子族 $A(t)$ 满足条件(A_1),$g(\cdot,\cdot):[0,T]\times H\to H$ 是一个映射,$g(t,x)$ 关于 x 满足 Lipschitz 条件,对$\forall\ \xi(\cdot)\in L^2((0,T),V)$,$g(t,\xi(t))$ 在区间$[0,T]$上是 Bochner 可积的。则对$\forall\ x_0\in H$,半线性发展方程

$$\frac{dx}{dt}+A(t)x=g(t,x)\quad t\in(0,T]\tag{3.3.3}$$

$$x(0)=x_0$$

存在唯一解 $x(\cdot)\in C([0,T],H)\cap L^2((0,T),V)$

证 作代换，把 $x(t)$ 换成 $x(t)e^{kt}$。因此只要证明发展方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+(A(t)+kI)x=g(t,x)\quad t\in(0,T]\qquad(3.3.4)$$

$$x(0)=x_0$$

存在唯一解就可以了。

对任一 $\xi(\cdot)\in L^2((0,T),V)$，解关于 $y(t)$ 的线性发展方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(A(t)+kI)y=g(t,\xi(t)),t\in(0,T]\qquad(3.3.5)$$

$$y(0)=x_0$$

依假定 $A(t)$ 满足条件(A_1)，线性发展方程(3.3.5)存在唯一解 $y(\cdot)\in C([0,T],H)\cap L^2((0,T),V)$。这样就定义了一个映射 $F:L^2((0,T),V)\to L^2((0,T),V)$。$\forall\ \xi(\cdot)\in L^2((0,T),V)$，$F\xi(\cdot)=y(\cdot)$。下面我们来证明 F 是一个压缩映射。

对任意的 $\xi_1(\cdot),\xi_2(\cdot)\in L^2((0,T),V)$ 已给，让 $y_1(\cdot)$，$y_2(\cdot)$ 分别是相应于 $\xi_1(\cdot),\xi_2(\cdot)$ 的方程(3.3.5)的解。用线性发展方程关于解的能量等式

$$\begin{aligned}&|y_1(t)-y_2(t)|^2+2\int_0^t\langle A(s)(y_1(s)-y_2(s)),(y_1(s)\\&-y_2(s))\rangle\mathrm{d}s+2k\int_0^t|y_1(s)-y_2(s)|^2\mathrm{d}s\\&=2\int_0^t\langle y_1(s)-y_2(s),g(s,\xi_1(s))\\&-g(s,\xi_2(s))\rangle\mathrm{d}s,\forall\ t\in[0,T]\end{aligned}$$

由上面的能量等式和条件(A_1)得

$$\begin{aligned}&|y_1(t)-y_2(t)|^2+2\alpha\int_0^t\|y_1(s)-y_2(s)\|^2\mathrm{d}s-2\lambda\int_0^t|y_1(s)\\&-y_2(s)|^2\mathrm{d}s+2k\int_0^t|y_1(s)-y_2(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant 2g_0\int_0^t|y_1(s)\\&-y_2(s)||\xi_1(s)-\xi_2(s)|\mathrm{d}s\leqslant g_0\varepsilon\int_0^t|y_1(s)-y_2(s)|^2\mathrm{d}s\\&+g_0\varepsilon^{-1}\int_0^t|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant g_0\varepsilon\int_0^t|y_1(s)-y_2(s)|^2\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$+ g_0 \varepsilon^{-1} \int_0^t \| \xi_1(s) - \xi_2(s) \|^2 ds \quad (3.3.6)$$

其中，$g_0>0$ 是常数，$\varepsilon>0$。

让 $\theta\in(0,1)$，选择 $\varepsilon>0$ 使得 $2\alpha=g_0(\theta\varepsilon)^{-1}=\beta$。然后选 $k>0$ 足够大使得 $2(k-\lambda)-g_0\varepsilon=d>0$。如此选定这些常数后，由式(3.3.6)得

$$\int_0^t \| y_1(s) - y_2(s) \|^2 ds + \frac{d}{\beta}\int_0^t |y_1(s) - y_2(s)|^2 ds$$

$$\leqslant \theta \int_0^t \| \xi_1(s) - \xi_2(s) \|^2 ds \quad \forall\, t \in [0,T]$$

由此得

$$\| F\xi_1 - F\xi_2 \|_{L^2((0,T),V)} \leqslant \theta^{1/2} \| \xi_1 - \xi_2 \|_{L^2((0,T),V)}$$

这就证明了 F 是映 $L^2((0,T),V)$ 入自身的压缩映射，因此存在唯一的 F 的不动点。这就是说方程(3.3.4)或等价地方程(3.3.3)存在唯一解。 证毕

对于任意的容许控制 $u^*(\cdot),v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，用 $x^*(t)$ 表示相应于 $u^*(\cdot)$ 的方程(3.3.1)的解。

考虑变分方程

$$\frac{dz}{dt} + A(t)z = g_x(t,x^*(t),u^*(t))z$$

$$+ [g(t,x^*(t),v(t)) - g(t,x^*(t),u^*(t))] \quad (3.3.7)$$

$$z(0) = 0$$

在(A_1)和(A_2)条件下，对每一 $v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，线性发展方程(3.3.7)存在唯一解 $z(\cdot)\in C([0,T],H)\cap L^2((0,T),V)$。这个解记为 $z(t)=z(t,v)$。

定理 3.13 在假设(A_1)，(A_2)下，对任意的容许控制$u^*(\cdot)$，$v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，$z(t,v)$是变分方程(3.3.7)的解，$\forall\,\varepsilon\in(0,1)$，存在容许控制 $u^\varepsilon(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，使得相应于 $u^\varepsilon(\cdot)$，$u^*(\cdot)$的方程(3.3.1)的解 $x^\varepsilon(t)$，$x^*(t)$成立

$$x^\varepsilon(t) = x^*(t) + \varepsilon z(t,v) + \varepsilon r_\varepsilon(t) \quad t \in [0,T]$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|r_\varepsilon(t)|\to 0\quad(\varepsilon\to 0)$$

证　由假设 $A(t)$ 满足条件 (A_1)，存在算子族：$U(t,s)$，$0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 是发展方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+A(t)x=0$$

的基本解算子。

用第一章§1.2的引理1.2，存在可测子集 $e_\varepsilon\subset[0,T]$，使得 $\mathrm{mes}\ e_\varepsilon=\varepsilon T$ 和

$$\varepsilon\int_0^t U(t,s)\{g(s,x^*(s),v(s))-g(s,x^*(s),u^*(s))\}\mathrm{d}s$$

$$=\int_{e_\varepsilon\cap[0,t]}U(t,s)\{g(s,x^*(s),v(s))$$

$$-g(s,x^*(s),u^*(s))\}\mathrm{d}s+a_\varepsilon(t)\qquad(3.3.8)$$

其中

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\varepsilon^{-1}|a_\varepsilon(t)|\to 0\quad(\varepsilon\to 0)$$

令

$$u^\varepsilon(s)=\begin{cases}v(s)，当\ s\in e_\varepsilon\\ u^*(s)，当\ s\in[0,T]\backslash e_\varepsilon\end{cases}$$

则

$$\varepsilon\int_0^t U(t,s)\{g(s,x^*(s),v(s))-g(s,x^*(s),u^*(s))\}\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^t U(t,s)\{g(s,x^*(s),u^\varepsilon(s))$$

$$-g(s,x^*(s),u^*(s))\}\mathrm{d}s+a_\varepsilon(t)\qquad(3.3.9)$$

依 $x^\varepsilon(t)$ 与 $x^*(t)$ 的定义，它们分别满足方程

$$x^{\varepsilon\prime}(t)+A(t)x^\varepsilon(t)=g(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t)),x^\varepsilon(0)=x_0$$

$$x^{*\prime}(t)+A(t)x^*(t)=g(t,x^*(t),u^*(t)),x^*(0)=x_0$$

两式相减得 $x^\varepsilon(t)-x^*(t)$ 满足方程和初始条件

$$(x^\varepsilon(t)-x^*(t))'+A(t)(x^\varepsilon(t)-x^*(t))$$

$$=g(t,x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))-g(t,x^*(t),u^*(t))$$

$$x^{\varepsilon}(0)-x^{*}(0)=0$$

用线性发展方程的能量等式有

$$\begin{aligned}&|x^{\varepsilon}(t)-x^{*}(t)|^{2}+2\int_{0}^{t}\langle A(s)(x^{\varepsilon}(s)\\&\quad -x^{*}(s)),(x^{\varepsilon}(s)-x^{*}(s))\rangle \mathrm{d}s\\&=2\int_{0}^{t}\langle g(s,x^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(s))-g(s,x^{*}(s),\\&\quad u^{*}(s)),(x^{\varepsilon}(s)-x^{*}(s))\rangle \mathrm{d}s\\&\qquad \forall t\in[0,T]\end{aligned}\tag{3.3.10}$$

用条件(A_1)，由式(3.3.10)得

$$\begin{aligned}&|x^{\varepsilon}(t)-x^{*}(t)|^{2}+2\alpha\int_{0}^{t}\|x^{\varepsilon}(s)-x^{*}(s)\|^{2}\mathrm{d}s\\&-2\lambda\int_{0}^{t}|x^{\varepsilon}(s)-x^{*}(s)|^{2}\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_{0}^{t}|x^{\varepsilon}(s)-x^{*}(s)|^{2}\mathrm{d}s+\int_{0}^{t}|g(s,x^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(s))\\&-g(s,x^{*}(s),u^{*}(s))|^{2}\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_{0}^{t}|x^{\varepsilon}(s)-x^{*}(s)|^{2}\mathrm{d}s+2\int_{0}^{t}|g(s,x^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(s))\\&-g(s,x^{*}(s),u^{\varepsilon}(s))|^{2}\mathrm{d}s\\&+2\int_{0}^{t}|g(s,x^{*}(s),u^{\varepsilon}(s))-g(s,x^{*}(s),u^{*}(s))|^{2}\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_{0}^{t}|x^{\varepsilon}(s)-x^{*}(s)|^{2}\mathrm{d}s+2c\int_{0}^{t}|x^{\varepsilon}(s)-x^{*}(s)|^{2}\mathrm{d}s\\&+2\int_{e_{\varepsilon}}|g(s,x^{*}(s),v(s))-g(s,x^{*}(s),u^{*}(s))|^{2}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

因此得估计式

$$\begin{aligned}&|x^{\varepsilon}(t)-x^{*}(t)|^{2}\leqslant k\int_{0}^{t}|x^{\varepsilon}(s)-x^{*}(s)|^{2}\mathrm{d}s\\&+2\int_{e_{\varepsilon}}|g(s,x^{*}(s),v(s))-g(s,x^{*}(s),u^{*}(s))|^{2}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

其中 $k=(1+2\lambda+2c)$

由上面的不等式得估计式

$$|x^\varepsilon(t)-x^*(t)|^2 \leqslant 2(k+ke^{kT})\int_{e_\varepsilon}|g(s,x^*(s),v(s))$$
$$-g(s,x^*(s),u^*(s))|^2\mathrm{d}s$$

于是

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x^\varepsilon(t)-x^*(t)|^2\to 0\quad(\varepsilon\to 0)\qquad(3.3.11)$$

令

$$r_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}(x^\varepsilon(t)-x^*(t))-z(t,v)$$

依定义，$x^\varepsilon(t)$，$x^*(t)$和$z(t,v)$分别是相应于$u^\varepsilon(t)$，$u^*(t)$的容许轨道和变分方程(3.3.7)的解，从而$r_\varepsilon(t)$满足下面的微分方程

$$\dot r_\varepsilon(t)+A(t)r_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}\{g(t,x^*(t)+\varepsilon r_\varepsilon(t)+\varepsilon z(t),u^\varepsilon(t))$$
$$-g(t,x^*(t),u^*(t))-\varepsilon g_x(t,x^*(t),u^*(t))z(t,v)$$
$$-\varepsilon[g(t,x^*(t),v(t))-g(t,x^*(t),u^*(t))]\}$$
$$=\varepsilon^{-1}\{g(t,x^*(t)+\varepsilon r_\varepsilon(t)+\varepsilon z(t),u^\varepsilon(t))-g(t,x^*(t),u^\varepsilon(t))\}$$
$$+\varepsilon^{-1}\{g(t,x^*(t),u^\varepsilon(t))-g(t,x^*(t),u^*(t))\}$$
$$-g_x(t,x^*(t),u^*(t))z(t,v)$$
$$-[g(t,x^*(t),v(t))-g(t,x^*(t),u^*(t))]\qquad(3.3.12)$$
$$r_\varepsilon(0)=0$$

算子$U(t,s)$是基本解算子，方程(3.3.12)的解$r_\varepsilon(t)$可表示为

$$r_\varepsilon(t)=\int_0^t U(t,s)\varepsilon^{-1}\{g(s,x^*(s)+\varepsilon r_\varepsilon(s)+\varepsilon z(s),u^\varepsilon(s))$$
$$-g(s,x^*(s),u^\varepsilon(s))\}\mathrm{d}s$$
$$+\varepsilon^{-1}\int_0^t U(t,s)\{g(s,x^*(s),u^\varepsilon(s))-g(s,x^*(s),u^*(s))\}\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^t U(t,s)g_x(s,x^*(s),u^*(s))z(s,v)\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^t U(t,s)\{g(s,x^*(s),v(s))-g(s,x^*(s),u^*(s))\}\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^t U(t,s)\int_0^1 g_x(s,x^*(s)+\lambda\varepsilon(r_\varepsilon(s)$$

$$+ z(s)),u^{\varepsilon}(s))r_{\varepsilon}(s)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s + \int_0^t U(t,s)\int_0^1 [g_x(s,x^*(s) + \lambda\varepsilon(r_{\varepsilon}(s)$$

$$+ z(s)),u^{\varepsilon}(s)) - g_x(s,x^*(s),u^*(s))]z(s,v)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s$$

$$+ \varepsilon^{-1}\int_{e_{\varepsilon}\cap[0,t]} U(t,s)\{g(s,x^*(s),v(s)) - g(s,x^*(s),u^*(s))\}\mathrm{d}s$$

$$- \int_0^t U(t,s)\{g(s,x^*(s),v(s)) - g(s,x^*(s),u^*(s))\}\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^t U(t,s)\int_0^1 g_x(s,x^*(s) + \lambda\varepsilon(r_{\varepsilon}(s) + z(s)),u^{\varepsilon}(s))r_{\varepsilon}(s)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s$$

$$+ \int_0^t U(t,s)\int_0^1 [g_x(s,x^*(s) + \lambda\varepsilon(r_{\varepsilon}(s) + z(s)),u^{\varepsilon}(s))$$

$$- g_x(s,x^*(s),u^*(s))]z(s,v)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s - \varepsilon^{-1}a_{\varepsilon}(t)$$

约定

$$\hat{r}_{\varepsilon}(t) = \int_0^t U(t,s)\int_0^1 g_x(s,x^*(s) + \lambda\varepsilon(r_{\varepsilon}(s) + z(s)),$$

$$u^{\varepsilon}(s))r_{\varepsilon}(s)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s + \int_0^t U(t,s)\int_0^1 [g_x(s,x^*(s) + \lambda\varepsilon(r_{\varepsilon}(s)$$

$$+ z(s)),u^{\varepsilon}(s)) - g_x(s,x^*(s),u^*(s))]z(s,v)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s$$

则 $r_{\varepsilon}(s) = \hat{r}_{\varepsilon}(t) - \varepsilon^{-1}a_{\varepsilon}(t)$

上面定义的 $\hat{r}_{\varepsilon}(t)$ 满足下面的发展方程和初始条件：

$$\dot{\hat{r}}_{\varepsilon}(t) + A(t)\hat{r}_{\varepsilon}(t) = \int_0^1 g_x(t,x^*(t) + \lambda\varepsilon(r_{\varepsilon}(t) + z(t)),$$

$$u^{\varepsilon}(t))\hat{r}_{\varepsilon}(t)\mathrm{d}\lambda + \int_0^1 [g_x(t,x^*(t) + \lambda\varepsilon(r_{\varepsilon}(t) + z(t)),u^{\varepsilon}(t))$$

$$- g_x(t,x^*(t),u^*(t))]z(t,v)\mathrm{d}\lambda - \int_0^1 g_x(t,x^*(t) + \lambda\varepsilon(r_{\varepsilon}(t)$$

$$+ z(t)),u^{\varepsilon}(t))\varepsilon^{-1}a_{\varepsilon}(t)\mathrm{d}\lambda \tag{3.3.13}$$

$$\hat{r}(0) = 0$$

对发展方程(3.3.13)用能量等式得

$$|\hat{r}_{\varepsilon}(t)|^2 + 2\int_0^t \langle A(s)\hat{r}_{\varepsilon}(s),\hat{r}_{\varepsilon}(s)\rangle\mathrm{d}s$$

$$= 2\int_0^t \langle \int_0^1 g_x(s, x^*(s) + \lambda\varepsilon(r_\varepsilon(s) + z(s)), u^\varepsilon(s)) \mathrm{d}\lambda \hat{r}_\varepsilon(s),$$

$$\hat{r}_\varepsilon(s)\rangle \mathrm{d}s + 2\int_0^t \langle \int_0^1 [g_x(s, x^*(s) + \lambda\varepsilon(r_\varepsilon(s) + z(s)), u^\varepsilon(s))$$

$$- g_x(s, x^*(s), u^*(s))] z(s, v) \mathrm{d}\lambda, \hat{r}_\varepsilon(s)\rangle \mathrm{d}s - 2\varepsilon^{-1}\int_0^t \langle \int_0^1 g_x(s, x^*(s)$$

$$+ \lambda\varepsilon(r_\varepsilon(s) + z(s)), u^\varepsilon(s)) a_\varepsilon(s) \mathrm{d}\lambda, \hat{r}_\varepsilon(s)\rangle \mathrm{d}s$$

用条件(A_1),由上式得

$$|\hat{r}_\varepsilon(t)|^2 + 2\alpha\int_0^t \|\hat{r}_\varepsilon(s)\|^2 \mathrm{d}s - 2\lambda\int_0^t |\hat{r}_\varepsilon(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$\leqslant 2g_0\int_0^t |\hat{r}_\varepsilon(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$+ \int_0^t \Big| \int_0^1 [g_x(s, x^*(s) + \lambda\varepsilon(r_\varepsilon(s) + z(s)), u^\varepsilon(s))$$

$$- g_x(s, x^*(s), u^*(s))] z(s, v) d\lambda \Big|^2 \mathrm{d}s + \int_0^t |\hat{r}_\varepsilon(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$+ g_0^2\int_0^t |\hat{r}_\varepsilon(s)|^2 \mathrm{d}s + \varepsilon^{-2} g_0^2 \int_0^t |a_\varepsilon(s)|^2 \mathrm{d}s$$

由此得

$$|\hat{r}_\varepsilon(t)|^2 \leqslant k\int_0^t |\hat{r}_\varepsilon(s)|^2 \mathrm{d}s + g_0^2 \varepsilon^{-2}\int_0^t |a_\varepsilon(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$+ \int_{e_\varepsilon} \Big| \int_0^1 [g_x(s, x^*(s) + \lambda\varepsilon(r_\varepsilon(s) + z(s)), v(s))$$

$$- g_x(s, x^*(s), u^*(s))] z(s, v) \mathrm{d}\lambda \Big|^2 \mathrm{d}s$$

其中　$k = (2\lambda + 2g_0 + g_0^2 + 1)$

由上述不等式可得,存在正常数 c,使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\hat{r}_\varepsilon(t)|^2 \leqslant c \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\varepsilon^{-1} a_\varepsilon(t)|^2$$

$$+ c\int_{e_\varepsilon} \Big| \int_0^1 [g_x(s, x^*(s) + \lambda\varepsilon(r_\varepsilon(s) + z(s)), v(s))$$

$$- g_x(s, x^*(s), u^*(s))] z(s, v) \mathrm{d}\lambda \Big|^2 \mathrm{d}s \to 0 (\varepsilon \to 0)$$

用 $r_\varepsilon(t)$ 与 $\hat{r}_\varepsilon(t)$ 的关系式,得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|r_\varepsilon(t)|^2 \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

并且

$$x^\varepsilon(t) = x^*(t) + \varepsilon z(t,v) + \varepsilon r_\varepsilon(t)$$ 证毕

定理 3.14 设 U_{ad} 是闭集，$u^*(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$ 是控制问题(3.3.1)—(3.3.2)的最优控制，$x^*(t)$ 是相应于 $u^*(t)$ 的最优轨道，$z(t,v)$ 是变分方程(3.3.7)的解，则

$$\int_0^T f_x(s,x^*(s),u^*(s))z(s,v)\mathrm{d}s + h_x(x^*(T))z(T,v)$$

$$+\int_0^T\{f(s,x^*(s),v(s)) - f(s,x^*(s),u^*(s))\}\mathrm{d}s \geqslant 0$$

$$\forall\, v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad} \tag{3.3.14}$$

证 定义 $S=\mathscr{U}_{ad}$。$\forall\, u(\cdot),v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，定义

$$\rho(u(\cdot),v(\cdot)) = \int_0^T \frac{|u(t)-v(t)|}{1+|u(t)-v(t)|}\mathrm{d}t$$

则 ρ 是 S 上的距离，(S,ρ) 是完备的距离空间。依距离 ρ 的收敛等价于依测度 $\mathrm{d}t$ 的收敛。

在距离空间 (S,ρ) 上考虑如下的泛函 $J^\varepsilon(v(\cdot))$ 的极值问题

$$J^\varepsilon(v(\cdot)) = [(J(v(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon)^2 + (J(v(\cdot)) - J(u^*(\cdot)))^2]^{1/2}$$

显然

$$0 < \inf_{v(\cdot)\in S} J^\varepsilon(v(\cdot)) \leqslant J^\varepsilon(u^*(\cdot)) = \varepsilon$$

$$J^\varepsilon(u^*(\cdot)) < \inf_{v(\cdot)\in S} J^\varepsilon(v(\cdot)) + \varepsilon$$

依引理 1.1，存在 $u^\varepsilon(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$ 满足

$$J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot)) \leqslant J^\varepsilon(u^*(\cdot)) = \varepsilon \tag{3.3.15}$$

$$\rho(u^\varepsilon(\cdot),u^*(\cdot)) \leqslant \varepsilon^{1/2} \tag{3.3.16}$$

$$J^\varepsilon(v(\cdot)) \geqslant J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot)) - \varepsilon^{1/2}\rho(u^\varepsilon(\cdot),v(\cdot)) \quad \forall\, v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad} \tag{3.3.17}$$

设 $v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$ 是任一容许控制，$x(\cdot)$ 是相应于 $v(\cdot)$ 的容许轨道。依第一章的§1.2的引理1.2，对 $\lambda\in(0,1)$，存在可测子

集 $e_\lambda \subset [0,T]$ 和 $u_\lambda^\varepsilon(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad}$，使得

$$\text{mes } e_\lambda \leqslant \lambda T$$

$$u_\lambda^\varepsilon(t) = \begin{cases} v(t), \text{当 } t \in e_\lambda \\ u^\varepsilon(t), \text{当 } t \notin e_\lambda \end{cases}$$

$$\rho(u^\varepsilon(\cdot), u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) \leqslant c_1 \lambda \quad c_1 \text{ 是正常数}$$

$$x_\lambda^\varepsilon(t) = x^\varepsilon(t) + \lambda \hat{z}(t, u^\varepsilon) + o(\lambda)$$

$$\lambda \int_0^T [f(s, x^\varepsilon(s), v(s)) - f(s, x^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s))] \mathrm{d}s$$

$$= \int_{e_\lambda} [f(s, x^\varepsilon(s), v(s)) - f(s, x^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s))] \mathrm{d}s + o(\lambda)$$

(3.3.18)

其中，$u^\varepsilon(t)$ 是式(3.3.15)、(3.3.16)、(3.3.17)中的 $u^\varepsilon(t)$，$x^\varepsilon(t)$ 是相应于 $u^\varepsilon(t)$ 的轨道，$x_\lambda^\varepsilon(t)$ 是相应于 $u_\lambda^\varepsilon(t)$ 的轨道，$\hat{z}(t, u^\varepsilon)$ 是变分方程

$$\frac{\mathrm{d}\hat{z}}{\mathrm{d}t} + A(t)\hat{z} = g_x(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))\hat{z}$$

$$+ [g(t, x^\varepsilon(t), v(t)) - g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))]$$

$$\hat{z}(0) = 0$$

的解。

现在来计算泛函 $J(\cdot)$ 在 $u_\lambda^\varepsilon(\cdot)$ 与 $u^\varepsilon(\cdot)$ 点的值之差：

$$J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J(u^\varepsilon(\cdot)) = \int_0^T [f(s, x_\lambda^\varepsilon(s), u_\lambda^\varepsilon(s))$$

$$- f(s, x^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s))] \mathrm{d}s + [h(x_\lambda^\varepsilon(T)) - h(x^\varepsilon(T))]$$

$$= \int_0^T [f(s, x^\varepsilon(s) + \lambda \hat{z}(s, u^\varepsilon) + o(\lambda), u_\lambda^\varepsilon(s))$$

$$- f(s, x^\varepsilon(s), u_\lambda^\varepsilon(s))] \mathrm{d}s + \int_0^T [f(s, x^\varepsilon(s), u_\lambda^\varepsilon(s)) - f(s, x^\varepsilon(s),$$

$$u^\varepsilon(s))] \mathrm{d}s + [h(x^\varepsilon(T) + \lambda \hat{z}(T, u^\varepsilon) + o(\lambda)) - h(x^\varepsilon(T))]$$

$$= \lambda \int_0^T f_x(s, x^\varepsilon(s), u_\lambda^\varepsilon(s)) \hat{z}(s, u^\varepsilon) \mathrm{d}s + \lambda h_x(x^\varepsilon(T)) \hat{z}(T, u^\varepsilon)$$

$$+ \int_{e_\lambda} [f(s, x^\varepsilon(s), v(s)) - f(s, x^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s))] \mathrm{d}s + o(\lambda)$$

式中 $o(\lambda)/\lambda\to 0\quad(\lambda\to 0)$

用式(3.3.18)，上式右端

$$= \lambda\int_0^T f_x(s,x^\varepsilon(s),u_\lambda^\varepsilon(s))\hat{z}(s,u^\varepsilon)\mathrm{d}s$$

$$+ \lambda h_x(x^\varepsilon(T))\hat{z}(T,u^\varepsilon)$$

$$+ \lambda\int_0^T [f(s,x^\varepsilon(s),v(s)) - f(s,x^\varepsilon(s),u^\varepsilon(s))]\mathrm{d}s + o(\lambda) \tag{3.3.19}$$

约定

$$I(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) = \{[J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon]^2 + [J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))]^2\}^{\frac12} + \{[J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon]^2 + [J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))]^2\}^{\frac12}$$

如果 $a\geqslant 0, b\geqslant 0, a+b>0$，用简单的关系式

$$a^{\frac12} - b^{\frac12} = (a-b)(a^{\frac12} + b^{\frac12})^{-1}$$

得

$$\begin{aligned}
J^\varepsilon(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot)) &= \{[J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon]^2 \\
&+ [J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))]^2\}^{\frac12} \\
&- \{[J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon]^2 + [J(u^\varepsilon(\cdot)) \\
&- J(u^*(\cdot))]^2\}^{\frac12} \\
&= \frac{1}{I(u_\lambda^\varepsilon(\cdot))}\{[J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon]^2 + [J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) \\
&- J(u^*(\cdot))]^2 - [J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon]^2 \\
&- [J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))]^2\} \\
&= \frac{1}{I(u_\lambda^\varepsilon(\cdot))}\{[J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon]^2 - [J(u^\varepsilon(\cdot)) \\
&- J(u^*(\cdot)) + \varepsilon]^2\} + \frac{1}{I(u_\lambda^\varepsilon(\cdot))}\{[J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) \\
&- J(u^*(\cdot))]^2 - [J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))]^2\}
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

易知下面两个关系式成立

$$[J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon]^2 - [J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon]^2$$

$$= [J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J(u^\varepsilon(\cdot))][J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) + J(u^\varepsilon(\cdot)) - 2J(u^*(\cdot)) + 2\varepsilon] \tag{3.3.21}$$

$$[J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))]^2 - [J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))]^2$$
$$= [J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J(u^\varepsilon(\cdot))][J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) + J(u^\varepsilon(\cdot)) - 2J(u^*(\cdot))] \tag{3.3.22}$$

由式(3.3.19)得

$$J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) \to J(u^\varepsilon(\cdot)) \quad (\lambda \to 0) \tag{3.3.23}$$

将式(3.3.21)和式(3.3.22)代入式(3.3.20)，得

$$J^\varepsilon(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot)) = \frac{2}{I(u_\lambda^\varepsilon(\cdot))}[J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J(u^\varepsilon(\cdot))][J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) + J(u^\varepsilon(\cdot)) - 2J(u^*(\cdot)) + \varepsilon] \tag{3.3.24}$$

依 $I(u_\lambda^\varepsilon(\cdot))$ 的定义和式(3.3.23)，得

$$\begin{aligned} I(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) \to & \{[J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon]^2 + [J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))]^2\}^{1/2} \\ & + \{[J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon]^2 + [J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))]^2\}^{1/2} \\ & = 2\{[J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon]^2 + [J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))]^2\}^{1/2} \end{aligned}$$
$$(\lambda \to 0) \tag{3.3.25}$$

$$\begin{aligned} & \{J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) + J(u^\varepsilon(\cdot)) - 2J(u^*(\cdot)) + \varepsilon\} \\ & \to \{2J(u^\varepsilon(\cdot)) - 2J(u^*(\cdot)) + \varepsilon\} \\ & = \{J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon\} \\ & + \{J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))\} (\lambda \to 0) \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

将式(3.3.19)、(3.3.25)和式(3.3.26)代入式(3.3.24)的右端，得

$$J^\varepsilon(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot))$$

$$= \frac{[J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon] + [J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))]}{\{[J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon]^2 + [J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))]^2\}^{1/2}}$$

$$\times \left\{\lambda \int_0^T f_x(s, x^\varepsilon(s), u_\lambda^\varepsilon(s)) \hat{z}(s, u^\varepsilon) \mathrm{d}s + \lambda h_x(x^\varepsilon(T)) \hat{z}(T, u^\varepsilon)\right.$$

$$+\lambda\int_0^T[f(s,x^\varepsilon(s),v(s))-f(s,x^\varepsilon(s),u^\varepsilon(s))]\mathrm{d}s\Big\}+o(\lambda)$$

(3.3.27)

令

$$p(\varepsilon)=\frac{[J(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot))+\varepsilon]+[J(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot))]}{\{[J(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot))+\varepsilon]^2+[J(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot))]^2\}^{1/2}}$$

用简单的关系式，如果 $a\geqslant0,b\geqslant0,a+b>0$，则 $1\leqslant(a+b)^2(a^2+b^2)^{-1}\leqslant2$。由假设 $u^*(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$ 是最优控制，$J(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot))\geqslant0,\forall\ \varepsilon\in(0,1)$。令

$$a=J(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot)),\quad b=J(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot))+\varepsilon$$

用上面的关系式，得

$$1\leqslant p^2(\varepsilon)\leqslant2,\quad\forall\ \varepsilon\in(0,1)$$

数列 $\{p(\varepsilon)\},\varepsilon\in(0,1)$ 是非负有界数列，可选出收敛子列仍记为 $p(\varepsilon)\to p_0(\varepsilon\to0)$，并且 $1\leqslant p_0\leqslant2$

依距离 ρ 的定义有

$$\rho(u^\varepsilon(\cdot),u_\lambda^\varepsilon(\cdot))=\int_0^T\frac{|u_\lambda^\varepsilon(t)-u^\varepsilon(t)|}{1+|u_\lambda^\varepsilon(t)-u^\varepsilon(t)|}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{e_\lambda}\frac{|v(t)-u^\varepsilon(t)|}{1+|v(t)-u^\varepsilon(t)|}\mathrm{d}t\leqslant\int_{e_\lambda}\mathrm{d}t=\mathrm{mes}\ e_\lambda\leqslant\lambda T$$

由式(3.3.17)得

$$J^\varepsilon(u_\lambda^\varepsilon(\cdot))-J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot))\geqslant-\varepsilon^{1/2}\rho(u^\varepsilon(\cdot),u_\lambda^\varepsilon(\cdot))\geqslant-\lambda\varepsilon^{1/2}T$$

(3.3.28)

将式(3.3.27)代入式(3.3.28)的左端得

$$p(\varepsilon)\Big\{\int_0^T f_x(s,x^\varepsilon(s),u_\lambda^\varepsilon(s))\hat{z}(s,u^\varepsilon)\mathrm{d}s+h_x(x^\varepsilon(T))\hat{z}(T,u^\varepsilon)$$

$$+\int_0^T[f(s,x^\varepsilon(s),v(s))-f(s,x^\varepsilon(s),u^\varepsilon(s))]\mathrm{d}s\Big\}$$

$$\geqslant-T\varepsilon^{1/2}+o(1)\tag{3.3.29}$$

依距离 $\rho(u_\lambda^\varepsilon(\cdot),u^\varepsilon(\cdot))\to0(\lambda\to0)$ 收敛等价于 $u_\lambda^\varepsilon(t)$，依测度 $\mathrm{d}t$ 收敛于 $u^\varepsilon(t)$，从而可选出一个子列 $u_{\lambda_i}^\varepsilon(t)\to u^\varepsilon(t)(\lambda_i\to0,i\to\infty)$，$a.e.\ t\in[0,T]$。于是有

$$\int_0^T f_x(s,x^{\varepsilon}(s),u_{\lambda_i}^{\varepsilon}(s))\hat{z}(s,u^{\varepsilon})\mathrm{d}s \to \int_0^T f_x(s,x^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(s))\hat{z}(s,u^{\varepsilon})\mathrm{d}s$$

$$(\lambda_i \to 0, i \to \infty)$$

在式(3.3.29)中，令 $\lambda_i \to 0$，得

$$p(\varepsilon)\left\{\int_0^T f_x(s,x^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(s))\hat{z}(s,u^{\varepsilon})\mathrm{d}s + h_x(x^{\varepsilon}(T))\hat{z}(T,u^{\varepsilon})\right.$$
$$\left. + \int_0^T [f(s,x^{\varepsilon}(s),v(s)) - f(s,x^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(s))]\mathrm{d}s\right\} \geqslant -T\varepsilon^{1/2}$$
$$\forall \varepsilon \in (0,1) \tag{3.3.30}$$

由式(3.3.16)得 $\rho(u^{\varepsilon}(\cdot),u^*(\cdot)) \leqslant \varepsilon^{1/2} \to 0(\varepsilon \to 0)$。类似于上面，可选出一子列，仍记为 $u^{\varepsilon_i}(t) \to u^*(t)(\varepsilon_i \to 0, i \to \infty)$，$a.e.\ t \in [0,T]$。用定理的条件，类似于式(3.3.11)之证，有

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |x^{\varepsilon_i}(t) - x^*(t)| \to 0(\varepsilon_i \to 0)$$

由此可得

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\hat{z}(t,u^{\varepsilon_i}) - z(t,v)| \to 0(\varepsilon_i \to 0)$$

在式(3.3.30)中，令 $i \to \infty$，得

$$p_0\left\{\int_0^T f_x(s,x^*(s),u^*(s))z(s,v)\mathrm{d}s + h_x(x^*(T))z(T,v)\right.$$
$$\left. + \int_0^T [f(s,x^*(s),v(s)) - f(s,x^*(s),u^*(s))]\mathrm{d}s\right\} \geqslant 0$$
$$\tag{3.3.31}$$

因为 $p_0 > 0$，由式(3.3.31)得式(3.3.14)。　　　　证毕

定理 3.15　在(A_1)，(A_2)，(A_3)和(A_4)的假定下，设 U_{ad} 是闭集，$u^*(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad}$ 是控制问题(3.3.1)—(3.3.2)的最优控制，$x^*(t)$是相应于 $u^*(t)$的最优轨道，则存在 $p^*(t)$，$t \in [0,T]$，使得 $(x^*(t),p^*(t),u^*(t))$满足

(1)微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t} + A(t)x^*(t) = g(t,x^*(t),u^*(t)) \quad t \in [0,T] \tag{3.3.32}$$

$$x^*(0) = x_0$$

$$-\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}t}+A^*(t)p^*(t)=g_x^*(t,x^*(t),u^*(t))p^*(t)-f_x(t,x^*(t),u^*(t))\qquad(3.3.33)$$

$$p^*(T)=-h_x(x^*(T))$$

(2)最大值原理

$$\max_{u\in U_{ad}}H(t,x^*(t),p^*(t),u)=H(t,x^*(t),p^*(t),u^*(t))$$

$$a.e.\ t\in[0,T]\qquad(3.3.34)$$

其中

$$H(t,x,p,u)=-f(t,x,u)+\langle p,g(t,x,u)\rangle$$

g_x^* 表示算子 g_x 的伴随算子，$A^*(t)$表示 $A(t)$的伴随算子。

证 发展方程(3.3.33)是一个线性发展方程，在已给的终端条件下，存在唯一解

$$p^*(\cdot)\in C([0,T],H)\cap L^2((0,T),V)$$

在变分方程(3.3.7)两端用 $p^*(t)$取内积后，在区间$[0,T]$上积分，并用分部积分公式，得

$$\int_0^T\langle p^*(t),g_x(t,x^*(t),u^*(t))z(t)\rangle\mathrm{d}t+\int_0^T\langle p^*(t),$$
$$g(t,x^*(t),v(t))-g(t,x^*(t),u^*(t))\rangle\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^T\langle p^*(t),A(t)z(t)\rangle\mathrm{d}t+\int_0^T\langle p^*(t),\dot{z}(t)\rangle\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^T\langle p^*(t),A(t)z(t)\rangle\mathrm{d}t-h_x(x^*(T))z(T,v)$$
$$-\int_0^T\langle\dot{p}^*(t),z(t)\rangle\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^T\langle A^*(t)p^*(t)-\dot{p}^*(t),z(t)\rangle\mathrm{d}t-h_x(x^*(T))z(T,v)$$
$$=\int_0^T\langle g_x^*(t,x^*(t),u^*(t))p^*(t),z(t)\rangle\mathrm{d}t$$
$$-\int_0^T\langle f_x(t,x^*(t),u^*(t)),z(t)\rangle\mathrm{d}t-h_x(x^*(T))z(T,v)$$

即

$$\int_0^T \langle f_x(t,x^*(t),u^*(t)),z(t)\rangle dt + h_x(x^*(T))z(T,v)$$

$$= -\int_0^T \langle p^*(t),g(t,x^*(t),v(t)) - g(t,x^*(t),u^*(t))\rangle dt$$

(3.3.35)

用定理 3.14 的结果，将式(3.3.35)代入式(3.3.14)，得

$$\int_0^T \{f(t,x^*(t),v(t)) - f(t,x^*(t),u^*(t))\}dt$$

$$-\int_0^T \langle p^*(t),g(t,x^*(t),v(t)) - g(t,x^*(t),u^*(t))\rangle dt \geqslant 0$$

$\forall\ v(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad}$

用 Hamiltonian 函数 $H(t,x,p,u)$来表达上式有

$$\int_0^T H(t,x^*(t),p^*(t),v(t))dt \leqslant \int_0^T H(t,x^*(t),p^*(t),u^*(t))dt \quad \forall\ v(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad} \qquad (3.3.36)$$

对任一 $u \in U_{ad}$，令

$$\psi(t) = H(t,x^*(t),p^*(t),u^*(t)) - H(t,x^*(t),p^*(t),u)$$

$$e = \{t \mid t \in [0,T],\psi(t) < 0\}$$

如果集 e 的 Lebesgue 测度 mes $e>0$。取

$$\hat{v}(t) = \begin{cases} v, 当\ t \in e \\ u^*(t), 当\ t \in [0,T]\backslash e \end{cases}$$

则 $\hat{v}(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad}$。将 $\hat{v}(\cdot)$代入式(3.3.36)，得

$$\int_e \psi(t)dt \geqslant 0$$

集 e 的测度依假定 mes $e>0$，于是

$$\int_e \psi(t)dt < 0$$

这是一个矛盾。因此必须 mes $e=0$。即是 $\psi(t)\geqslant 0$, a.e. $t\in[0,T]$。所以得

$$\max_{u \in U_{ad}} H(t,x^*(t),p^*(t),u) = H(t,x^*(t),p^*(t),u^*(t))$$

a.e. $t\in[0,T]$ 证毕

第四章　具有完全观测信息的随机系统的最优控制
（状态空间法）

物理的或组织化的系统的实际处理，经常涉及环境和建模的不确定性。例如，通信设备中的噪声、未知的系统参数（时变的或非时变的）、或者排队网络中的随机访问，都会引起不确定性。随机控制理论主要研究其中这些不确定性可以表示为随机变量或随机过程的动力系统的递推估计和控制问题。随机控制和估计在航空、航天、导航和控制、信号处理及通信、制造过程等各种领域中的应用，推动了随机控制和非线性估计的发展。以随机分析和马尔可夫扩散过程为基础的最优随机控制的数学理论和非线性滤波的数学理论，都得到了充分的发展。最优随机控制问题在 20 世纪 70 年代和 80 年代引起了数学家们的很大兴趣，是很活跃的领域之一。这些理论的发展又促进了随机分析和偏微分方程的研究。

在本章将要研究的具有完全观测信息的随机系统的最优控制问题，就是在研究用 Itô 随机微分方程描述的随机系统的最优控制问题中，假定系统的状态变量是完全精确量测的。对于具有完全观测信息的随机系统的最优控制问题的研究，本章的基本数学工具是状态空间法。这种方法，除了描述受控系统的状态过程是随机过程外，还引入了另一个随机过程，称为协态过程，以及相应于这个最优控制问题的用状态变量、协态变量及控制变量来表达的 Hamiltonian 函数，其目的在于寻求这种类型的随机系统的最优控制满足的条件—— Pontryagin 最大值原理的表达形式。

§4.1 问题的叙述

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个概率空间，在这个概率空间上，考虑用下面的Itô随机微分方程描述的随机系统的最优控制问题：

受控制系统为

$$dx(t)=g(x(t),u(t))dt+\sigma(x(t),u(t))dw_t \quad (4.1.1)$$
$$x(0)=x_0\in R^n$$

其中，$x(t)$是取值于n维欧氏空间R^n的随机过程，称为系统的状态过程，是受控的过程；$u(t)$是取值于r维欧氏空间R^r中的随机过程(当然可以是确定性过程)，称为控制过程，简称控制；g和σ是两个函数

$$g(\cdot,\cdot):R^n\times R^r\to R^n$$
$$\sigma(\cdot,\cdot):R^n\times R^r\to\mathscr{L}(R^m,R^n)$$

即对每一$(x,u)\in R^n\times R^r$，$\sigma(x,u)$是一个$n\times m$矩阵；$w_t,t\in[0,T]$是一个m维的标准的Wiener过程。让$\mathscr{F}_t$表示Wiener过程$w_s,s\in[0,T]$在时刻t前事件产生的σ-域，即

$$\mathscr{F}_t=\sigma(w_s;0\leqslant s\leqslant t)$$

对$\mathscr{F}_t$完备化后仍记为$\mathscr{F}_t$。对每一$t\in[0,T]$，$\mathscr{F}_t$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$的σ-域$\mathscr{F}$的子σ-域。让t在$[0,T]$变动时得到一族σ-域$\{\mathscr{F}_t\}$。

设U是空间R^r中的一个非空子集。定义随机过程类

$U_{ad}=\{u(t)|u(\cdot):[0,T]\to R^r,\forall t\in[0,T],u(t)$是对$\sigma$-域族$\{\mathscr{F}_t\}$适应的随机过程，$a.e.t\in[0,T],u(t)\in U,a.s.$和有界$\}$

设$f(x,u)$和$h(x)$是两个函数

$$f(\cdot,\cdot):R^n\times R^r\to R^1$$
$$h(\cdot):R^n\to R^1$$

受控系统(4.1.1)的性能指标为

$$J(u(\cdot))=E\left\{\int_0^T f(x(t),u(t))dt+h(x(T))\right\} \quad (4.1.2)$$

随机系统的最优控制问题是寻求 $u^*(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$J(u^*(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} J(u(\cdot)) \tag{4.1.3}$$

任一 $u(\cdot)\in U_{ad}$ 称为容许控制，$u^*(\cdot)\in U_{ad}$ 满足式(4.1.3)称为最优控制，相应于 $u^*(\cdot)$ 的方程(4.1.1)的解 $x^*(t)$ 称为最优轨道。

§4.2 随机微分方程的解

在这一节，我们将讨论 Itô 随机微分方程(4.1.1)的解存在唯一性问题。所用的方法与通常的随机微分方程书中所介绍的方法不同，而是用不动点定理来证明存在唯一性。

定义随机过程的空间

$L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}(R^m,R^n))=\{b(t)\mid\forall\, t\in[0,T],\ b(t)\in\mathscr{L}(R^m,R^n)$，$b(t)$ 是对 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应的随机过程，$E\int_0^T\|b(t)\|^2\mathrm{d}t<\infty\}$

$L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)=\{a(t)\mid\forall\, t\in[0,T]$，$a(t)$ 是 n 维的对 $\mathscr{F}_t$ 可测的随机过程，$E\int_0^T|a(t)|^2\mathrm{d}t<\infty\}$

其中 $|\cdot|$ 是 R^n 中的欧几里得范数，$\|\cdot\|$ 是矩阵范数。

对 $a(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)$，$b(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}(R^m,R^n))$ 和 $A(\cdot):[0,T]\to\mathscr{L}(R^n,R^n)$，$\int_0^T\|A(t)\|\mathrm{d}t<\infty$，线性随机微分方程

$$\mathrm{d}\xi(t)+A(t)\xi\mathrm{d}t=a(t)\mathrm{d}t+b(t)\mathrm{d}w_t \tag{4.2.1}$$
$$\xi(0)=\xi_0\in R^n$$

存在唯一解

$$\xi(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)\cap L^2(\Omega,C([0,T],R^n))$$

$$\xi(t)=\Phi_t\left\{\xi_0+\int_0^t\Phi_s^{-1}a(s)\mathrm{d}s+\int_0^t\Phi_s^{-1}b(s)\mathrm{d}w_s\right.$$

其中 Φ_t 是确定性的线性微分方程

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t) = 0$$

的基本解矩阵，Φ_t^{-1} 是 Φ_t 的逆矩阵。

假定对于每一个 $u(\cdot)\in U_{ad}$ $\forall \xi\in R^n$

$$g(\xi,u(t)) \in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)$$
$$\sigma(\xi,u(t)) \in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}(R^m,R^n)) \qquad (4.2.2)$$

并且存在不依赖于 $u(\cdot)$和 ξ 的正常数 g_0 和 σ_0，使得

$$|g(\xi_1,u(t)) - g(\xi_2,u(t))| \leqslant g_0|\xi_1 - \xi_2| \quad \forall \xi_1,\xi_2 \in R^n$$
$$\|\sigma(\xi_1,u(t)) - \sigma(\xi_2,u(t))\| \leqslant \sigma_0|\xi_1 - \xi_2| \quad \forall \xi_1,\xi_2 \in R^n$$
$$(4.2.3)$$

定理 4.1 在条件(4.2.2)和(4.2.3)之下，对每一个 $u(\cdot)\in U_{ad}$，随机微分方程

$$\mathrm{d}x(t) = g(x(t),u(t))\mathrm{d}t + \sigma(x(t),u(t))\mathrm{d}w_t \qquad (4.2.4)$$
$$x(0) = x_0 \in R^n$$

存在唯一解 $x(t)$满足

$$x(\cdot) \in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n) \cap L^2(\Omega,C([0,T],R^n))$$

证 在方程(4.2.4)的右端的 $g(x(t),u(t))$和 $\sigma(x(t),u(t))$简单地记为 $g(x(t),t)$和 $\sigma(x(t),t)$。并且将 $x(t)$代换成 $x(t)e^{kt}$后，方程(4.2.4)存在唯一性的问题等价于方程

$$\mathrm{d}x(t)+kx(t)\mathrm{d}t=g(x(t),t)\mathrm{d}t+\sigma(x(t),t)\mathrm{d}w_t \qquad (4.2.5)$$
$$x(0) = x_0 \in R^n$$

的存在唯一性问题。

设 $\xi(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)$，解关于 $x(t)$的线性随机微分方程

$$\mathrm{d}x(t)+kx(t)\mathrm{d}t=g(\xi(t),t)\mathrm{d}t+\sigma(\xi(t),t)\mathrm{d}w_t \qquad (4.2.6)$$
$$x(0) = x_0$$

方程(4.2.6)是形如方程(4.2.1)的方程，依前面所述方程(4.2.6)存在唯一解

$$x(\cdot) \in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n) \cap L^2(\Omega,C([0,T],R^n))$$

因此，对于每一个 $\xi(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)$，存在方程(4.2.6)的唯一解 $x(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)$。这样就定义了一个映射 $\xi(\cdot)\to$

$x(\cdot): L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n) \to L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)$。下面将证明这个映射是压缩映射。

设 $\xi_1(\cdot),\xi_2(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)$，$x_1(\cdot),x_2(\cdot)$是分别相应于 $\xi_1(\cdot),\xi_2(\cdot)$的方程(4.2.6)的解。用 Itô 公式得

$$E|x_1(t)-x_2(t)|^2+2kE\int_0^t|x_1(s)-x_2(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$=2E\int_0^t(x_1(s)-x_2(s),g(\xi_1(s),s)-g(\xi_2(s),s))\mathrm{d}s$$

$$+E\int_0^t\mathrm{tr}[(\sigma(\xi_1(s),s)-\sigma(\xi_2(s),s))(\sigma(\xi_1(s),s)$$

$$-\sigma(\xi_2(s),s))^*]\mathrm{d}s$$

其中"$*$"表示矩阵的转置运算，tr 表示矩阵的迹。

用条件(4.2.3)，由上式得

$$E|x_1(t)-x_2(t)|^2+2kE\int_0^t|x_1(s)-x_2(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant 2g_0E\int_0^t|x_1(s)-x_2(s)||\xi_1(s)-\xi_2(s)|\mathrm{d}s$$

$$+\sigma_0E\int_0^t|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant g_0E\int_0^t|x_1(s)-x_2(s)|^2\mathrm{d}s+g_0E\int_0^t|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$+\sigma_0E\int_0^t|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2\mathrm{d}s,\forall t\in[0,T]$$

选择 $k>0$ 适当大，使得 $2k-g_0>0$ 和 $\theta=(g_0+\sigma_0)(2k-g_0)^{-1}<1$，由上面的不等式得

$$E\int_0^t|x_1(s)-x_2(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant\theta E\int_0^t|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2\mathrm{d}s$$

这就证明了映射 $\xi(\cdot)\to x(\cdot)$是从空间 $L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)$到自身的压缩映射，因此存在唯一的不动点 $x(t)$，满足方程(4.2.4)。

证毕

§4.3 轨道变分

我们首先来讨论系统(4.2.4)的扩散项 $\sigma(x,u)=\sigma(x)$ 不依赖于控制变量 u 的情形的最优控制问题。

为了后面讨论问题，需要作如下的假定：

(A_1) 设 $g(\cdot,\cdot):R^n\times R^r\to R^n$ 连续，$g(x,u)$ 关于 x 的偏导数 $g_x(x,u)$ 对于 (x,u) 连续和 g_x 有界。

(A_2) 设 $\sigma(\cdot):R^n\to\mathscr{L}(R^m,R^n)$，关于 x 连续可微，$\sigma_x(x)$ 有界。

(A_3) 设 $f(\cdot,\cdot):R^n\times R^r\to R^1$ 连续，$f(x,u)$ 关于 x 的偏导数 $f_x(x,u)$ 对于 (x,u) 连续。

(A_4) 设 $h(\cdot):R^n\to R^1$ 连续可微。

对于任意的 $u(\cdot)\in U_{ad}$，用 $x(t)$ 表示相应于 $u(t)$ 的随机微分方程(4.2.4)的解，即是方程

$$
\begin{aligned}
&dx(t)=g(x(t),u(t))dt+\sigma(x(t))dw, \qquad (4.3.1)\\
&x(0)=x_0\in R^n
\end{aligned}
$$

的解。

考虑随机变分方程，对于任意的 $u(\cdot),v(\cdot)\in U_{ad}$

$$
\begin{aligned}
dz(t)=&[g_x(x(t),u(t))z(t)+(g(x(t),v(t))\\
&-g(x(t),u(t)))]dt+\sigma_x(x(t))z(t)dw, \qquad (4.3.2)\\
z(0)=&0
\end{aligned}
$$

方程(4.3.2)的解是存在唯一的。固定 $u(t)$ 时，它的解依赖于 $v(t)$，记为 $z(t)=z(t,v)$。

定理 4.2 在 (A_1) 和 (A_2) 的条件下，对 $\forall\ \varepsilon\in(0,1)$，存在 $u^\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}$，$x^\varepsilon(t)$ 是相应于 $u^\varepsilon(t)$ 的方程(4.3.1)解，$x(t)$ 是相应于 $u(t)$ 的方程(4.3.1)的解，则

$$
x^\varepsilon(t)=x(t)+\varepsilon z(t,v)+\varepsilon r_\varepsilon(t) \quad a.e.\ t,a.s. \qquad (4.3.3)
$$

其中 $z(t,v)$ 是变分方程(4.3.2)的解和

$$\sup_{0\le t\le T} E|r_\varepsilon(t)|^2 \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

证 对固定 $u(\cdot),v(\cdot)\in U_{ad}$，$\forall\ \varepsilon\in(0,1)$，依引理 1.2，存在可测子集 $e_\varepsilon\subset[0,T]$，使得 $\mathrm{mes}\ e_\varepsilon=\varepsilon T$，并且

$$\varepsilon\int_0^t (g(x(s),v(s)) - g(x(s),u(s)))\mathrm{d}s$$

$$= \int_{e_\varepsilon\cap[0,t]} (g(x(s),v(s)) - g(x(s),u(s)))\mathrm{d}s + a_\varepsilon(t) \tag{4.3.4}$$

$$\sup_{0\le t\le T} E|\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(t)|^2 \to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$$

令

$$u^\varepsilon(t) = \begin{cases} v(t), 当\ t\in e_\varepsilon \\ u(t), 当\ t\in[0,T]\setminus e_\varepsilon \end{cases}$$

$$r_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}(x^\varepsilon(t) - x(t)) - z(t,v)$$

用 $x^\varepsilon(t)$ 表示相应于 $u^\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}$ 的轨道，则有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}r_\varepsilon(t) &= \varepsilon^{-1}(\mathrm{d}x^\varepsilon(t) - \mathrm{d}x(t)) - \mathrm{d}z(t,v)\\
&= \varepsilon^{-1}(g(x^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t)) - g(x(t),u(t)))\mathrm{d}t\\
&\quad + \varepsilon^{-1}(\sigma(x^\varepsilon(t)) - \sigma(x(t)))\mathrm{d}w_t\\
&\quad - [g_x(x(t),u(t))z(t) + (g(x(t),v(t))\\
&\quad - g(x(t),u(t)))]\mathrm{d}t - \sigma_x(x(t))z(t)\mathrm{d}w_t\\
&= \varepsilon^{-1}[g(x(t)+\varepsilon z(t)+\varepsilon r_\varepsilon(t),u^\varepsilon(t)) - g(x(t),u^\varepsilon(t))]\mathrm{d}t\\
&\quad + \varepsilon^{-1}[g(x(t),u^\varepsilon(t)) - g(x(t),u(t))]\mathrm{d}t\\
&\quad + \varepsilon^{-1}[\sigma(x(t)+\varepsilon z(t)+\varepsilon r_\varepsilon(t)) - \sigma(x(t))]\mathrm{d}w_t\\
&\quad - [g_x(x(t),u(t))z(t) + (g(x(t),v(t))\\
&\quad - g(x(t),u(t)))]\mathrm{d}t - \sigma_x(x(t))z(t)\mathrm{d}w_t
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1\{g_x(x(t)+\lambda\varepsilon(z(t)+r_\varepsilon(t)),u^\varepsilon(t)) - g_x(x(t),u(t))\}\mathrm{d}\lambda z(t)\mathrm{d}t$$

$$+\int_0^1 g_x(x(t)+\lambda\varepsilon(z(t)+r_\varepsilon(t)),u^\varepsilon(t))\mathrm{d}\lambda r_\varepsilon(t)\mathrm{d}t$$

$$+\int_0^1\{\sigma_x(x(t)+\lambda\varepsilon(z(t)+r_\varepsilon(t))) - \sigma_x(x(t))\}\mathrm{d}\lambda z(t)\mathrm{d}w_t$$

$$+\int_0^1 \sigma_x(x(t)+\lambda\varepsilon(z(t)+r_\varepsilon(t)))\mathrm{d}\lambda\, r_\varepsilon(t)\mathrm{d}w_t$$

$$+\varepsilon^{-1}[g(x(t),u^\varepsilon(t))-g(x(t),u(t))]\mathrm{d}t$$

$$-[g(x(t),v(t))-g(x(t),u(t))]\mathrm{d}t$$

$$r_\varepsilon(0)=0$$

上面的微分方程写成积分形式，用式(1.3.4)得

$$\begin{aligned} r_\varepsilon(t) = {} & \int_0^t\int_0^1 g_x(x(s)+\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s)),u^\varepsilon(s))\mathrm{d}\lambda\, r_\varepsilon(s)\mathrm{d}s \\ & + \int_0^t\int_0^1 \sigma_x(x(s)+\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s)))\mathrm{d}\lambda\, r_\varepsilon(s)\mathrm{d}w_s \\ & + \int_0^t\int_0^1 \{g_x(x(s)+\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s)),u^\varepsilon(s)) - g_x(x(s), \\ & u(s))\}\mathrm{d}\lambda\, z(s)\mathrm{d}s + \int_0^t\int_0^1 \{\sigma_x(x(s)+\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s))) \\ & - \sigma_x(x(s))\}\mathrm{d}\lambda\, z(s)\mathrm{d}w_s - \varepsilon^{-1}\alpha_\varepsilon(t) \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \hat{r}_\varepsilon(t) = {} & \int_0^t\int_0^1 g_x(x(s)+\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s)),u^\varepsilon(s))\mathrm{d}\lambda\, r_\varepsilon(s)\mathrm{d}s \\ & + \int_0^t\int_0^1 \sigma_x(x(s)+\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s)))\mathrm{d}\lambda\, r_\varepsilon(s)\mathrm{d}w_s \\ & + \int_0^t\int_0^1 \{g_x(x(s)+\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s)),u^\varepsilon(s)) \\ & - g_x(x(s),u(s))\}\mathrm{d}\lambda\, z(s)\mathrm{d}s \\ & + \int_0^t\int_0^1 \{\sigma_x(x(s)+\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s))) \\ & - \sigma_x(x(s))\}\mathrm{d}\lambda\, z(s)\mathrm{d}w_s \end{aligned}$$

对随机过程 $\hat{r}_\varepsilon(t)$ 用 Itô 公式，得

$$\begin{aligned} E|\hat{r}_\varepsilon(t)|^2 = {} & 2E\int_0^t \left\langle \int_0^1 g_x(\cdot,u^\varepsilon(s))\mathrm{d}\lambda\, r_\varepsilon(s), \hat{r}_\varepsilon(s)\right\rangle \mathrm{d}s \\ & + 2E\int_0^t \left\langle \int_0^1 \{g_x(\cdot,u^\varepsilon(s)) - g_x(x(s),u(s))\}\mathrm{d}\lambda\, z(s), \right. \end{aligned}$$

$$\hat{r}_\varepsilon(s))\mathrm{d}s + E\int_0^t\left|\int_0^1\{[\sigma_x(\cdot) - \sigma_x(x(s))]z(s) - \sigma_x(x(s))r_\varepsilon(s)\}\mathrm{d}\lambda\right|^2\mathrm{d}s$$

用条件(A_1)和(A_2),$r_\varepsilon(t)=\hat{r}_\varepsilon(t)-\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(t)$,由上式得

$$E|\hat{r}_\varepsilon(t)|^2 \leqslant c_1E\int_0^t|\hat{r}_\varepsilon(s)|^2\mathrm{d}s + c_2E\int_0^t|\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(s)|^2\mathrm{d}s + c_3E\int_0^t\int_0^1|g_x(\cdot,u^\varepsilon(s)) - g_x(x(s),u(s))|^2|z(s)|^2\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s + c_4E\int_0^t\int_0^1|\sigma_x(\cdot) - \sigma_x(x(s))|^2\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s$$

用 Gronwall's 不等式,由上式得

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|r_\varepsilon(t)|^2 &\leqslant 2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(t)|^2 + 2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|\hat{r}_\varepsilon(t)|^2 \\ &\leqslant c_5E\int_0^t|\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(s)|^2\mathrm{d}s + 2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(t)|^2 \\ &\quad + c_6E\int_0^t\int_0^1|\sigma_x(x(s)+\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s))) \\ &\quad - \sigma_x(x(s))|^2\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s + c_7E\int_0^t\int_0^1|g_x(\cdot,v(s)) \\ &\quad - g_x(x(s),u(s))|^2|z(s)|^2\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s \to 0,(\varepsilon\to 0)\end{aligned}$$

证毕

§4.4　最优控制的必要条件

本节我们将要给出最优控制满足的两种必要条件。一种必要条件是用指标泛函的变分不等式给出的条件,是确定性的条件;另一种必要条件是在引入协态变量后,由前述的必要条件导出的最大值原理,是随机性的条件。

定理 4.3　在(A_1),(A_2),(A_3)和(A_4)的假定下,设 U 是闭集,让 $u^*(\cdot)\in U_{ad}$是控制问题(4.1.1)—(4.1.2)的最优控制,$x^*(t)$是相应于 $u^*(t)$的最优轨道,任一 $v(\cdot)\in U_{ad}$,$z(t,v)=z(t)$是变

分方程(4.3.2)中把 $u(t)$ 换成 $u^*(t)$ 后的解，则

$$E\left\{\int_0^T f_x(x^*(s),u^*(s))z(s)\mathrm{d}s + h_x(x^*(T))z(T)\right\}$$
$$+ E\int_0^T \{f(x^*(s),v(s)) - f(x^*(s),u(s))\}\mathrm{d}s \geqslant 0$$
$$(4.4.1)$$

证 令 $S=U_{ad}$。$\forall\, u(\cdot),v(\cdot)\in S$，定义

$$\rho = (u(\cdot),v(\cdot)) = E\int_0^T \frac{|u(s)-v(s)|}{1+|u(s)-v(s)|}\mathrm{d}s$$

则 $\rho(\cdot,\cdot)$ 是 S 上的距离，(S,ρ) 是完备的距离空间，依距离 ρ 的收敛等价于依测度 $\mathrm{d}t\times\mathrm{d}P$ 的收敛。

考虑在距离空间 (S,ρ) 上定义的泛函数

$$J^\varepsilon(v(\cdot)) = \{[J(v(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon]^2 + [J(v(\cdot))$$
$$- J(u^*(\cdot))]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

其中泛函 $J(\cdot)$ 用式(4.1.2)定义，$\varepsilon>0$

显然

$$0 < \inf_{v(\cdot)\in S} J^\varepsilon(v(\cdot)) \leqslant J^\varepsilon(u^*(\cdot))$$
$$J^\varepsilon(u^*(\cdot)) < \inf_{v(\cdot)\in S} J^\varepsilon(v(\cdot)) + \varepsilon$$

依引理 1.1，存在 $u^\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot)) \leqslant J^\varepsilon(u^*(\cdot)) = \varepsilon \qquad (4.4.2)$$

$$J^\varepsilon(v(\cdot)) \geqslant J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot)) - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\rho(u^\varepsilon(\cdot),v(\cdot)),\forall\, v(\cdot)\in U_{ad}$$
$$(4.4.3)$$

$$\rho(u^\varepsilon(\cdot),u^*(\cdot)) \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{2}} \qquad (4.4.4)$$

对任一 $v(\cdot)\in U_{ad}$，$\forall\,\lambda\in(0,1)$，依引理 1.2 和定理 4.2，存在勒贝格可测子集 $e_\lambda\subset[0,T]$ 和 $u_\lambda^\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$u_\lambda^\varepsilon(t) = \begin{cases} v(t), & \text{当 } t\in e_\lambda \\ u^\varepsilon(t), & \text{当 } t\in[0,T]\backslash e_\lambda \end{cases}$$

$$\mathrm{mes}\; e_\lambda = \lambda T \qquad (4.4.5)$$

$$x_\lambda^\varepsilon(t) = x^\varepsilon(t) + \lambda z^\varepsilon(t,v) + \lambda r_\lambda^\varepsilon(t) \qquad (4.4.6)$$

$$\sup_{0\le t\le T} E\,|r^\varepsilon_\lambda(t)|^2 \to 0 \quad (\lambda\to 0)$$

$$\begin{aligned}&\lambda\int_0^T\{f(x^\varepsilon(s),v(s)) - f(x^\varepsilon(s),u^\varepsilon(s))\}\mathrm{d}s\\ &= \int_{E_\lambda}\{f(x^\varepsilon(s),v(s)) - f(x^\varepsilon(s),u^\varepsilon(s))\}\mathrm{d}s + o(\lambda)\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

其中，$x^\varepsilon(t)$、$x^\varepsilon_\lambda(t)$分别是相应于$u^\varepsilon(t)$，$u^\varepsilon_\lambda(t)$的轨道；$z^\varepsilon(t)=z^\varepsilon(t,v)$是在变分方程(4.3.2)中将$u(t)$用$u^\varepsilon(t)$代换后的变分方程的解。

下面计算泛函$J(\cdot)$在两点$u^\varepsilon_\lambda(\cdot)$与$u^\varepsilon(\cdot)$的值之差：

$$\begin{aligned}
J(u^\varepsilon_\lambda(\cdot)) - J(u^\varepsilon(\cdot)) &= E\int_0^T\{f(x^\varepsilon_\lambda(s),u^\varepsilon_\lambda(s))\\
&\quad - f(x^\varepsilon(s),u^\varepsilon(s))\}\mathrm{d}s + E\{h(x^\varepsilon_\lambda(T)) - h(x^\varepsilon(T))\}\\
&= E\int_0^T\{f(x^\varepsilon(s)+\lambda z^\varepsilon(s)+\lambda r^\varepsilon_\lambda(s),u^\varepsilon_\lambda(s)) - f(x^\varepsilon(s),u^\varepsilon_\lambda(s))\}\mathrm{d}s\\
&\quad + E\int_0^T\{f(x^\varepsilon(s),u^\varepsilon_\lambda(s)) - f(x^\varepsilon(s),u^\varepsilon(s))\}\mathrm{d}s\\
&\quad + E\{h(x^\varepsilon(T)+\lambda z^\varepsilon(T)+\lambda r^\varepsilon_\lambda(T)) - h(x^\varepsilon(T))\}\\
&= \lambda E\left\{\int_0^T f_x(x^\varepsilon(s),u^\varepsilon_\lambda(s))z^\varepsilon(s)\mathrm{d}s + h_x(x^\varepsilon(T))z^\varepsilon(T)\right\}\\
&\quad + E\int_{E_\lambda}\{f(x^\varepsilon(s),v(s)) - f(x^\varepsilon(s),u^\varepsilon(s))\}\mathrm{d}s + o(\lambda)\\
&= \lambda E\left\{\int_0^T f_x(x^\varepsilon(s),u^\varepsilon_\lambda(s))z^\varepsilon(s)\mathrm{d}s + h_x(x^\varepsilon(T))z^\varepsilon(T)\right\}\\
&\quad + \lambda E\int_0^T\{f(x^\varepsilon(s),v(s)) - f(x^\varepsilon(s),u^\varepsilon(s))\}\mathrm{d}s + o(\lambda)
\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

其中用了式(4.4.7)得式(4.4.8)，$o(\lambda)/\lambda\to 0\quad(\lambda\to 0)$

用第一章§1.2的引理1.3和式(4.4.8)，得

$$\begin{aligned}&J^\varepsilon(u^\varepsilon_\lambda(\cdot)) - J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot))\\
&= \frac{(J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon) + (J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))}{J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot))}\end{aligned}$$

$$\times (J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J(u^\varepsilon(\cdot))) + o(\lambda)$$

$$= \lambda\beta(\varepsilon)\left\{E\int_0^T f_x(x^\varepsilon(s), u_\lambda^\varepsilon(s))z^\varepsilon(s)\mathrm{d}s + Eh_x(x^\varepsilon(T))z^\varepsilon(T)\right.$$

$$\left.+ E\int_0^T [f(x^\varepsilon(s), v(s)) - f(x^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s))]\mathrm{d}s\right\} + o(\lambda) \quad (4.4.9)$$

其中

$$\beta(\varepsilon) = [(J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon) + (J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)))][J'(u^\varepsilon(\cdot))]^{-1}$$

依距离 ρ 和 $u_\lambda^\varepsilon(\cdot)$ 的定义，得

$$\rho(u_\lambda^\varepsilon(\cdot), u^\varepsilon(\cdot)) = E\int_{e_\lambda} \frac{|v(s) - u^\varepsilon(s)|}{1 + |v(s) - u^\varepsilon(s)|}\mathrm{d}s \leqslant E\int_{e_\lambda}\mathrm{d}s = \mathrm{mes}\ e_\lambda = \lambda T \quad (4.4.10)$$

用 $u_\lambda^\varepsilon(\cdot)$ 代入式(4.4.3)，用式(4.4.9)和式(4.4.10)，得

$$\lambda\beta(\varepsilon)\left\{E\int_0^T f_x(x^\varepsilon(s), u_\lambda^\varepsilon(s))z^\varepsilon(s)\mathrm{d}s + Eh_x(x^\varepsilon(T))z^\varepsilon(T)\right.$$

$$\left.+ E\int_0^T [f(x^\varepsilon(s), v(s)) - f(x^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s))]\mathrm{d}s\right\} + o(\lambda)$$

$$\geqslant -\varepsilon^{1/2}\rho(u_\lambda^\varepsilon(\cdot), u^\varepsilon(\cdot)) \geqslant -\lambda\varepsilon^{1/2}T \quad (4.4.11)$$

用式(4.4.10)，$\rho(u_\lambda^\varepsilon(\cdot), u^\varepsilon(\cdot)) \to 0(\lambda \to 0)$，这等价于 $u_\lambda^\varepsilon(\cdot)$ 当 $\lambda \to 0$ 时，依测度 $\mathrm{d}t \times \mathrm{d}P$ 收敛，从而可选出子列 $u_{\lambda_i}^\varepsilon(t) \to u^\varepsilon(t)$ ($\lambda_i \to 0$，当 $i \to \infty$)，$a.e.\ t, a.s.$。因此在式(4.4.11)中，用 λ_i 代替 λ 后，两端用 $\lambda_i > 0$ 除，然后令 $i \to \infty$，得

$$\beta(\varepsilon)\left\{E\int_0^T f_x(x^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s))z^\varepsilon(s)\mathrm{d}s + Eh_x(x^\varepsilon(T))z^\varepsilon(T)\right.$$

$$\left.+ E\int_0^T [f(x^\varepsilon(s), v(s)) - f(x^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s))]\mathrm{d}s\right\} \geqslant -\varepsilon^{1/2}T$$

$$(4.4.12)$$

依假定 $u^*(\cdot)$ 是最优控制，$J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) \geqslant 0$，$\forall \varepsilon \in (0,1)$。用简单的关系式，如果 $a \geqslant 0, b \geqslant 0, a + b > 0$，则 $1 \leqslant (a + b)^2 \cdot (a^2 + b^2)^{-1} \leqslant 2$。取 $a = (J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) + \varepsilon)$，$b =$

$(J(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot)))$，依 $\beta(\varepsilon)$ 的定义，有 $\beta(\varepsilon)\geqslant 1$ 和 $1\leqslant\beta^2(\varepsilon)\leqslant 2$，$\forall\ \varepsilon\in(0,1)$。于是数集 $\{\beta(\varepsilon)\}$，$\varepsilon\in(0,1)$ 是有界集。因此，可选出收敛子列 $\beta(\varepsilon_i)\to\beta_0(\varepsilon_i\to 0$，当 $i\to\infty)$，并且 $1\leqslant\beta_0\leqslant 2$。

依式(4.4.4)，$\rho(u^\varepsilon(\cdot),u^*(\cdot))\to 0(\varepsilon\to 0)$。与前面类似，可选出子列 $u^{\varepsilon_i}(t)\to u^*(t)(\varepsilon_i\to 0$，当 $i\to\infty)$，$a.e.\ t,a.s.$ 由此可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|x^{(i)}(t)-x^*(t)|^2\to 0\quad(i\to\infty)\qquad(4.4.13)$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|z^{\varepsilon_i}(t,v)-z(t,v)|^2\to 0\quad(i\to\infty)$$

其中 $x^{(i)}(t)$ 是相应于 $u^{\varepsilon_i}(t)$ 的轨道。

用式(4.4.13)，在式(4.4.12)中用 ε_i 代替 ε，令 $i\to\infty$，得

$$\beta_0\Big\{E\int_0^T f_x(x^*(t),u^*(t))z(t)\mathrm{d}t+Eh_x(x^*(T))z(T)$$

$$+E\int_0^T[f(x^*(t),v(t))-f(x^*(t),u^*(t))]\mathrm{d}t\Big\}\geqslant 0$$

用 $\beta_0\geqslant 1$，由上式可得不等式(4.4.1)。　　　　证毕

定理 4.4　在 (A_1)，(A_2)，(A_3) 和 (A_4) 的假定之下，设 U 是闭集，$u^*(\cdot)\in U_{ad}$ 是控制问题(4.4.1)—(4.4.2)的最优控制，$x^*(t)$ 是相应于 $u^*(t)$ 的最优轨道，则存在随机过程 $(\psi(\cdot),\Psi(\cdot))\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)\times(L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n))^m$，使得 $(x^*(t),\psi(t),\Psi(\cdot),u^*(t))$ 满足

(1)随机微分方程

$$\mathrm{d}x^*(t)=g(x^*(t),u^*(t))\mathrm{d}t+\sigma(x^*(t))\mathrm{d}w_t\qquad(4.4.14)$$

$$x(0)=x_0$$

$$-\mathrm{d}\psi(t)=[-f_x(x^*(t),u^*(t))+g_x^*(x^*(t),u^*(t))\psi(t)$$

$$-\sum_{j=1}^m\sigma_x^{*j}(x^*(t))\Psi_j(t)]\mathrm{d}t+\Psi(t)\mathrm{d}w_t\qquad(4.4.15)$$

$$\psi(T)=-h_x(x^*(T))$$

(2)最大值原理

$$\max_{u\in U}H(x^*(t),\psi(t),u)=H(x^*(t),\psi(t),u^*(t)),a.e.\ t,a.s.\qquad(4.4.16)$$

其中g_x^{T}，σ_x^{T}分别是矩阵g_x，σ_x的转置矩阵，和

$$H(x,\psi,u)=-f(x,u)+(\psi,g(x,u))$$

$$\Psi(t)=(\Psi_1(t),\cdots,\Psi_m(t))$$

证 对$\forall(\phi,\Phi)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)\times(L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n))^m$，$\Phi(t)=(\Phi_1(t),\cdots,\Phi_m(t))$，考虑线性随机微分方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\rho(t)=&(g_x(x^*(t),u^*(t))\rho(t)+\phi(t))\mathrm{d}t\\&+(\sigma_x(x^*(t))\rho(t)+\Phi(t))\mathrm{d}w_t\end{aligned}\tag{4.4.17}$$

$$\rho(0)=0$$

方程(4.4.17)存在唯一解$\rho(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)$

考虑在Hilbert空间$L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)\times(L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n))^m$上的线性泛函

$$I(\phi,\Phi)=E\left\{\int_0^T f_x(x^*(t),u^*(t))\rho(t)dt+h_x(x^*(T))\rho(T)\right\}\tag{4.4.18}$$

泛函(4.4.18)中的$\rho(t)$是方程(4.4.17)的解，易知$I(\phi,\Phi)$是Hilbert空间$L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)\times(L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n))^m$上的连续线性泛函。依Rieze's表现定理，存在唯一元对$(\hat{\psi}(\cdot),\Psi(\cdot))\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)\times(L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n))^m$，使得

$$\begin{aligned}&E\left\{\int_0^T f_x(x^*(t),u^*(t))\rho(t)\mathrm{d}t+h_x(x^*(T))\rho(T)\right\}\\&=E\int_0^T(\hat{\psi}(t),\phi(t))\mathrm{d}t+E\int_0^T\sum_{j=1}^m(\Psi_j(t),\Phi_j(t))\mathrm{d}t,\forall(\phi,\Phi)\in\\&\quad L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)\times(L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n))^m\end{aligned}\tag{4.4.19}$$

在方程(4.4.17)中，取$\phi(t)=g(x^*(t),v(t))-g(x^*(t),u^*(t))$，$\Phi(t)\equiv0$，此时方程(4.4.17)是变分方程(4.3.2)中令$u(t)=u^*(t)$的情形。因此$\rho(t)=z(t,v)$。把这样取定的$(\phi,\Phi)=(g(x^*(t),v(t))-g(x^*(t),u^*(t)),0)$和$\rho(t)=z(t,v)$代入式(4.4.19)，得

$$E\left\{\int_0^T f_x(x^*(t),u^*(t))z(t,v)\mathrm{d}t+h_x(x^*(T))z(T,v)\right\}$$

$$= E\int_0^T (\dot{\psi}(t), g(x^*(t), v(t)) - g(x^*(t), u^*(t)))\mathrm{d}t$$

(4.4.20)

将式(4.4.20)代入定理 4.3 的式(4.4.1)中,得

$$-E\int_0^T (\psi(t), g(x^*(t), v(t)) - g(x^*(t), u^*(t)))\mathrm{d}t$$

$$+ E\int_0^T \{f(x^*(t), v(t)) - f(x^*(t), u^*(t))\}\mathrm{d}t \geqslant 0$$

$$\forall v(\cdot) \in U_{ad},$$

其中 $\psi(t) = -\dot{\phi}(t)$。

用 Hamiltonian 函数 $H(x, \psi, u)$来表达上式,得

$$E\int_0^T H(x^*(t), \psi(t), v(t))\mathrm{d}t \leqslant E\int_0^T H(x^*(t), \psi(t), u^*(t))\mathrm{d}t \quad \forall v(\cdot) \in U_{ad} \tag{4.4.21}$$

任一 $u \in U$,令

$$\varphi(t) = H(x^*(t), \psi(t), u^*(t)) - H(x^*(t), \psi(t), u)$$

$$e = \{(t, \omega) | (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega, \varphi(t) < 0\}$$

如果集合 e 依测度 $\mathrm{d}t \times \mathrm{d}P$ 的测度 mes $e > 0$,取

$$\hat{v}(t) = \begin{cases} u, 当(t, \omega) \in e \\ u^*(t), 当(t, \omega) \notin e \end{cases}$$

则 $\hat{v}(\cdot) \in U_{ad}$。将 $\hat{v}(\cdot)$代入式(4.4.21),得

$$E\int_e \varphi(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$$

另一方面,依假定 mes $e > 0$,有

$$E\int_e \varphi(t)\mathrm{d}t < 0$$

这是一矛盾。因此必须 mes $e = 0$。即是 $\varphi(t) \geqslant 0$, $a.e.\ t \in [0, T]$, $a.s.$ 故

$$\max_{u \in U} H(x^*(t), \psi(t), u) = H(x^*(t), \psi(t), u^*(t)) \quad a.e.\ t, a.s.$$

这就证明了最大值原理。

下面将证明$(\psi(t), \Psi(t))$满足随机微分方程(4.4.15)。对任意

固定的 $s\in[0,T]$，$\forall\ \tau\in[s,T]$，令

$$r(s,\tau)\doteq E\{\hat{\psi}(s)-h_x(x^*(T))-\int_s^T(f_x(t)+g_x^*(t)\hat{\psi}(t)$$

$$+\sigma_x(t)\Psi(t))\mathrm{d}t\,|\,\mathscr{F}_\tau\}$$

其中 $f_x(t)+g_x^*(t)\hat{\psi}(t)+\sigma_x^*(t)\Psi(t)=f_x(x^*(t),u^*(t))+g_x^*(x^*(t),u^*(t))\hat{\psi}(t)+\sigma_x^*(x^*(t))\Psi(t)$

则对 $\forall\ s$ 固定，$r(s,t)$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$—鞅，依鞅的表示定理，存在唯一的 $\widetilde{\Psi}(\cdot,s)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T)\times\Omega,\mathscr{L}(R^m,R^n))$，使得

$$r(s,\tau)=\int_s^\tau\widetilde{\Psi}(t,s)\mathrm{d}w_t \tag{4.4.22}$$

对任意的 $(\tilde{\phi}(\cdot),\widetilde{\Phi}(\cdot))\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)\times(L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n))^m$，在式(4.4.19)中，取

$$\phi(t)=-g_x(x^*(t),u^*(t))\rho(t)+\tilde{\phi}(t)$$

$$\Phi(t)=-\sigma_x(x^*(t))\rho(t)+\widetilde{\Phi}(t)$$

于是方程(4.4.17)可写为

$$\mathrm{d}\rho(t)=\tilde{\phi}(t)\mathrm{d}t+\widetilde{\Phi}(t)\mathrm{d}w_t \tag{4.4.23}$$

$$\rho(0)=0$$

将上面的 $\phi(t)$、$\Phi(t)$ 和 $\rho(t)$ 代入式(4.4.19)，得

$$E\int_0^T(\hat{\psi}(t),\tilde{\phi}(t))\mathrm{d}t+E\int_0^T(\Psi(t),\widetilde{\Phi}(t))\mathrm{d}t$$

$$=E\int_0^T(f_x(t)+g_x^*(t)\hat{\psi}(t)+\sigma_x^*(t)\Psi(t))\rho(t)\mathrm{d}t$$

$$+Eh_x(x^*(T))\rho(T) \tag{4.4.24}$$

在式(4.4.23)中，取 $\widetilde{\Phi}(\cdot)=0$，代入式(4.4.24)，得

$$E\int_0^T(\hat{\psi}(t),\tilde{\phi}(t))\mathrm{d}t=E\int_0^T\langle(f_x(t)+g_x^*(t)\hat{\psi}(t)+\sigma_x^*(t)\Psi(t)),$$

$$\int_0^t\tilde{\phi}(s)\mathrm{d}s\rangle\mathrm{d}t+Eh_x(x^*(T))\int_0^T\tilde{\phi}(s)\mathrm{d}s$$

$$=E\int_0^T\langle h_x(x^*(T))+\int_s^T(f_x(t)+g_x^*(t)\hat{\psi}(t)$$

$$+\sigma_x^*(t)\Psi(t))\mathrm{d}t,\tilde{\phi}(s)\rangle\mathrm{d}s$$

$\forall\ \bar{\phi}(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T)\times\Omega,R^n)$

对$\forall\ \tau\in[0,s]$，由上式得

$$E\int_0^T E^{\mathscr{F}_\tau}\langle\hat{\psi}(t)-h_x(x^*(T))-\int_s^T(f_x(t)+g_x^*(t)\hat{\psi}(t)$$

$$+\sigma_x^*(t)\Psi(t))\mathrm{d}t,\bar{\phi}(s)\rangle\mathrm{d}s=0$$

$$\forall\ \bar{\phi}(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T)\times\Omega,R^n)$$

当$\tau\in[0,s]$，$\mathscr{F}_\tau\subset\mathscr{F}_s$，于是$L^2_{\mathscr{F}_\tau}((0,T)\times\Omega,R^n)\subset L^2_{\mathscr{F}_s}((0,T)\times\Omega,R^n)$，于是得到

$$E^{\mathscr{F}_\tau}(\hat{\psi}(t)-h_x(x^*(T))-\int_s^T(f_x(t)+g_x^*(t)\hat{\psi}(t)$$

$$+\sigma_x^*(t)\Psi(t))\mathrm{d}t)=0\quad\forall\ \tau\in[0,s]$$

即是$r(s,\tau)=0,\forall\ \tau\in[0,s]$。由公式(4.4.22)得$\widetilde{\Psi}(t,s)=0,\forall\ t\in[0,s)$。

在公式(4.4.22)中，取$\tau=T$，用$r(s,T)$的定义，得

$$\hat{\psi}(s)-h_x(x^*(T))-\int_s^T(f_x(t)+g_x^*(t)\hat{\psi}(t)+\sigma_x^*(t)\Psi(t))\mathrm{d}t$$

$$=\int_s^T\widetilde{\Psi}(t,s)\mathrm{d}w_t \tag{4.4.25}$$

对任一固定的$\tau\in[0,T]$，对任意的$\hat{\Phi}(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T)\times\Omega,\mathscr{L}(R^m,R^n))$，选取$(\bar{\phi}(\cdot),\widetilde{\Phi}(\cdot))\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T)\times\Omega,R^n)\times L^2_{\mathscr{F}}((0,T)\times\Omega,\mathscr{L}(R^m,R^n))$如下：

$$\bar{\phi}(\cdot)=0$$

$$\widetilde{\Phi}(s)=\begin{cases}0,s\in[0,\tau]\\ \hat{\Phi}(s),s\in(\tau,T]\end{cases}$$

将$(\bar{\phi}(\cdot),\widetilde{\Phi}(\cdot))$代入方程(4.4.23)，得

$$\rho(t)=\begin{cases}0,\text{当}\ t\in[0,\tau]\\ \int_\tau^t\hat{\Phi}(s)\mathrm{d}w_s,\text{当}\ t\in(\tau,T]\end{cases}$$

把上述的$\bar{\phi}(\cdot)=0,\widetilde{\Phi}(s)$和$\rho(s)$代入式(4.4.24)得

$$E\int_\tau^T\langle\Psi(t),\hat{\Phi}(t)\rangle\mathrm{d}t=E\int_\tau^T\langle(f_x(t)+g_x^*(t)\hat{\psi}(t)+\sigma_x^*(t)\Psi(t)),$$

$$\int_{\tau}^{T}\hat{\Phi}\mathrm{d}w_{s}\rangle\mathrm{d}t+E(h_{x}(x^{*}(T)),\int_{\tau}^{T}\hat{\Phi}(s)\mathrm{d}w_{s})\qquad(4.4.26)$$

在式(4.4.25)中，令 $s=\tau$ 后，用

$$-\int_{\tau}^{T}\hat{\Phi}(t)\mathrm{d}w_{t}$$

在式(4.4.25)两端取内积，再取数学期望，得

$$-E\int_{\tau}^{T}(\tilde{\Psi}(t,\tau),\hat{\Phi}(t))\mathrm{d}t=E(h_{x}(x^{*}(T)),\int_{\tau}^{T}\hat{\Phi}(s)\mathrm{d}w_{s})$$

$$+E\int_{\tau}^{T}\langle(f_{x}(t)-g_{x}^{*}(t)\hat{\psi}(t)+\sigma_{x}^{*}(t)\Psi(t)),\int_{\tau}^{t}\hat{\Phi}(s)\mathrm{d}w_{s}\rangle\mathrm{d}t$$

$$(4.4.27)$$

由式(4.4.26)和式(4.4.27)，得

$$E\int_{\tau}^{T}(\tilde{\Psi}(t,\tau)+\Psi(t),\hat{\Phi}(t))\mathrm{d}t=0$$

$$\forall\ \hat{\Phi}(\cdot)\in L_{\mathscr{F}}^{2}((0,T)\times\Omega,\mathscr{L}(R^{m},R^{n}))$$

因此得

$$\tilde{\Psi}(t,\tau)=-\Psi(t)\quad\forall\ \tau\in[0,T],a.s.$$

代入式(4.4.25)，得

$$\hat{\psi}(s)=h_{x}(x^{*}(T))+\int_{s}^{T}(f_{x}(t)+g_{x}^{*}(t)\hat{\psi}(t)$$

$$+\sigma_{x}^{*}(t)\Psi(t))\mathrm{d}t-\int_{s}^{T}\Psi(t)\mathrm{d}w_{t}\qquad\forall\ s\in[0,T]$$

注意到 $\hat{\psi}(t)=-\psi(t)$，就知道 $\psi(t)$ 满足式(4.4.15)。　　　证毕

§4.5　一般情形的轨道变分

在本节和下一节，我们将讨论系统(4.4.1)的扩散项 $\sigma(x,u)$ 依赖于控制变量 u 的情形的(4.4.1)—(4.4.2)的最优控制问题。在这种情形，不仅处理问题的技巧与前面不同，而且在最大值原理中必须包含有扩散项。

我们需要作如下的假定：

(B_1) 设$g(\cdot,\cdot):R^n\times R^r\to R^n$ 可测

$\sigma(\cdot,\cdot):R^n\times R^r\to\mathscr{L}(R^m,R^n)$可测

$|g(x,u)|\leqslant c(1+|x|+|u|)$

$|\sigma(x,u)|\leqslant c(1+|x|+|u|)$

(B_2) 设g和σ关于x两次连续可微，它们的偏导数g_x,g_{xx}，σ_x和σ_{xx}关于(x,u)连续和有界。

(B_3) 设$f(\cdot,\cdot):R^n\times R^r\to R^1$ 可测

$h(\cdot):R^n\to R^1$ 可测

并且f,h关于x两次连续可微，f_x,f_{xx},h_x,h_{xx}关于变元(x,u)连续，f_{xx}和h_{xx}有界和

$$|f_x(x,u)|\leqslant c(1+|x|+|u|)$$

$$|h_x(x)|\leqslant c(1+|x|)$$

其中c是代表不同量的常数，下面也如此。

定义容许控制类

$U_{ad}=\{u(t)=u(t,\omega)\mid u(t,\omega)$是可测的对$\sigma$-域族$\{\mathscr{F}_t\}$适应的随机过程，$u(t)\in U$，$a.e.\ t\in[0,T]$，$a.s.$，$\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}E|u(t)|^4<\infty\}$

引理 4.1 在(B_1)和(B_2)的条件下，对任一容许控制$u(\cdot)\in U_{ad}$，相应于$u(\cdot)$的方程(4.1.1)的解$x(t)$，$t\in[0,T]$，存在一个与初值x_0与$u(\cdot)$有关的常数c，使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|x(t)|^2\leqslant c$$

证 对于任意给定的$u(\cdot)\in U_{ad}$，由条件(B_2)，随机微分方程(4.1.1)存在唯一解$x(t)$，$t\in[0,T]$。

$$dx(t)=g(x(t),u(t))dt+\sigma(x(t),u(t))dw_t$$

$$x(0)=x_0$$

对满足上述方程的随机过程$x(t)$和函数$|x^2|$，用Itô公式，得

$$E|x(t)|^2=|x_0|^2+2E\int_0^t\langle g(x(s),u(s)),x(s)\rangle ds$$

$$+E\int_0^t|\sigma(x(s),u(s))|^2ds$$

$$\leqslant |x_0|^2 + E\int_0^t |g(x(s),u(s))|^2 ds + E\int_0^t |x(s)|^2 ds$$

$$+ E\int_0^t |\sigma(x(s),u(s))|^2 ds$$

$$\leqslant |x_0|^2 + cE\int_0^t (1 + |x(s)|^2 + |u(s)|^2) ds + E\int_0^t |x(s)|^2 ds$$

$$+ cE\int_0^t (1 + |x(s)|^2 + |u(s)|^2) ds$$

$$\leqslant |x_0| + c + cE\int_0^t |x(s)|^2 ds + cE\int_0^t |u(s)|^2 ds$$

用 Gronwall's 不等式得证。　　　　证毕

现在设 $u(\cdot)\in U_{ad}$ 是控制问题(4.1.1)—(4.1.2)的最优控制，$x(t)$ 是相应于 $u(t)$ 的最优轨道。对任意固定的 $v\in U$ 和任一 $\tau\in[0,T)$ 固定，$\varepsilon>0$ 足够小，定义

$$u^{\varepsilon}(t)=\begin{cases} v,\text{当 } t\in[\tau,\tau+\varepsilon] \\ u(t),\text{当 } t\notin[\tau,\tau+\varepsilon]\end{cases}$$

考虑下面的两个线性随机微分方程

$$\begin{aligned} dy_1(t) = {} & [g_x(x(t),u(t))y_1(t) + (g(x(t),u^{\varepsilon}(t)) \\ & - g(x(t),u(t)))]dt + [\sigma_x(x(t),u(t))y_1(t) \\ & + (\sigma(x(t),u^{\varepsilon}(t)) - \sigma(x(t),u(t)))]dw_t \qquad (4.5.1) \\ y_1(0) = {} & 0 \end{aligned}$$

$$dy_2(t) = \left[g_x(x(t),u(t))y_2(t) + \frac{1}{2}g_{xx}(x(t),u(t))y_1(t)y_1(t)\right]dt$$

$$+ \left[\sigma_x(x(t),u(t))y_2(t) + \frac{1}{2}\sigma_{xx}(x(t),u(t))y_1(t)y_1(t)\right]dw_t$$

$$+ [g_x(x(t),u^{\varepsilon}(t)) - g_x(x(t),u(t))]y_1(t)dt$$

$$+ [\sigma_x(x(t),u^{\varepsilon}(t)) - \sigma_x(x(t),u(t))]y_1(t)dw_t \qquad (4.5.2)$$

$$y_2(0) = 0$$

其中

$$F_x y = \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} y_i, \qquad F_{xx} yy = \sum_{i,j=1}^{n} F_{x_i x_j} y_i y_j$$

$F=g,\sigma$

方程(4.5.1)、(4.5.2)的解，分别记为 $y_1(t)=y_1(t,u^\varepsilon)$，$y_2(t)=y_2(t,u^\varepsilon)$

引理 4.2 随机微分方程(4.5.1)和(4.5.2)的解 $y_1(t,u^\varepsilon)$，$y_2(t,u^\varepsilon)$满足下面的估计式

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|y_1(t,u^\varepsilon)|^2 = O(\varepsilon) \tag{4.5.3}$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|y_2(t,u^\varepsilon)|^2 = O(\varepsilon^2) \tag{4.5.4}$$

这里 $O(\varepsilon)$，$O(\varepsilon^2)$表示当 $\varepsilon>0$ 足够小时，分别是与 $\varepsilon,\varepsilon^2$ 同阶的量。

证 对满足随机微分方程(4.5.1)的随机过程 $y_1(t)$和函数 $|y|^2$，用 Itô 公式和取数学期望得

$$\begin{aligned} E|y_1(t)|^2 &= 2E\int_0^t (g_x(x(s),u(s))y_1(s),y_1(s))\mathrm{d}s \\ &+ 2E\int_0^t (g(x(s),u^\varepsilon(s)) - g(x(s),u(s)),y_1(s))\mathrm{d}s \\ &+ E\int_0^t |\sigma_x(x(s),u(s))y_1(s) + (\sigma(x(s),u^\varepsilon(s)) \\ &- \sigma(x(s),u(s)))|^2\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

用条件(B_1)和(B_2)，存在正常数 g_1 和 σ_1，使得 $|g_x|\leqslant g_1$，$|\sigma_x|\leqslant\sigma_1$，用关系式

$$\begin{aligned} |\sigma_x(x,u)y_1 + (\sigma(x,u^\varepsilon) - \sigma(x,u))|^2 &\leqslant 2|\sigma_x(x,u)y_1|^2 \\ &+ 2|\sigma(x,u^\varepsilon) - \sigma(x,u)|^2 \\ &\leqslant 2\sigma_1^2|y_1|^2 + 2|\sigma(x,u^\varepsilon) - \sigma(x,u)|^2 \end{aligned}$$

由式(4.5.5)，得

$$\begin{aligned} E|y_1(t)|^2 \leqslant (2g_1 + 2\sigma_1^2 + 1)E\int_0^t |y_1(s)|^2\mathrm{d}s \\ + E\int_0^t |g(x(s),u^\varepsilon(s)) - g(x(s),u(s))|^2\mathrm{d}s \\ + 2E\int_0^t |\sigma(x(s),u^\varepsilon(s)) - \sigma(x(s),u(s))|^2\mathrm{d}s \end{aligned}$$

用 Gronwall's 不等式，存在正常数 c，使得

$$E|y_1(t)|^2 \leqslant c\left\{E\int_0^t |g(x(s),u^\varepsilon(s)) - g(x(s),u(s))|^2 \mathrm{d}s + E\int_0^t |\sigma(x(s),u^\varepsilon(s)) - \sigma(x(s),u(s))|^2 \mathrm{d}s\right\}$$

$$\forall\, t \in [0,T] \tag{4.5.6}$$

用条件(B_1)和 $u^\varepsilon(t)$的定义得

$$\begin{aligned}
&E\int_0^T |g(x(s),u^\varepsilon(s)) - g(x(s),u(s))|^2 \mathrm{d}s \\
&= E\int_\tau^{\tau+\varepsilon} |g(x(s),v) - g(x(s),u(s))|^2 \mathrm{d}s \\
&\leqslant 2E\int_\tau^{\tau+\varepsilon} |g(x(s),v)|^2 \mathrm{d}s + 2E\int_\tau^{\tau+\varepsilon} |g(x(s),u(s))|^2 \mathrm{d}s \\
&\leqslant cE\int_\tau^{\tau+\varepsilon} (1 + |x(s)|^2 + |u(s)|^2 + |v|^2)\mathrm{d}s \\
&\leqslant c\int_\tau^{\tau+\varepsilon} (1 + \sup_{0\leqslant s\leqslant T} E|x(s)|^2 + \sup_{0\leqslant s\leqslant T} E|u(s)|^2 + |v|^2)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

用引理 4.1 和 $u(\cdot)\in U_{ad}$，存在与 τ 和 ε 无关的正常数 c，上面不等式右端

$$\leqslant c\varepsilon \tag{4.5.7}$$

同理可得

$$E\int_0^t |\sigma(x(s),u^\varepsilon(s)) - \sigma(x(s),u(s))|^2 \mathrm{d}s \leqslant c\varepsilon \tag{4.5.8}$$

把估计式(4.5.7)和(4.5.8)代入式(4.5.6)，得到估计式(4.5.3)。

类似地可以得估计式

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|y_1(t)|^4 \leqslant c\varepsilon^2 \tag{4.5.9}$$

对满足随机微分方程(4.5.2)的随机过程 $y_2(t)$和函数 $|y|^2$ 用 Itô 公式后取数学期望，并用估计式(4.5.9)，可得估计式(4.5.4)。 证毕

定理 4.5 在(B_1)和(B_2)条件下，让 $y_1(t)=y_1(t,u^\varepsilon)$，$y_2(t)=y_2(t,u^\varepsilon)$分别是方程(4.5.1)、(4.5.2)的解，$x^\varepsilon(t)$是相应于容许控

制 $u^{\varepsilon}(t)$ 的轨道，则

$$x^{\varepsilon}(t) = x(t) + y_1(t) + y_2(t) + o(\varepsilon^2) \quad a.e.,a.s. \tag{4.5.10}$$

证 用展开式，有

$$\int_0^t g(x(s) + y_1(s) + y_2(s), u^{\varepsilon}(s))ds + \int_0^t \sigma(x(s) + y_1(s)$$
$$+ y_2(s), u^{\varepsilon}(s))dw_s$$
$$= \int_0^t \{g(x(s), u^{\varepsilon}(s)) + g_x(x(s), u^{\varepsilon}(s))(y_1(s) + y_2(s))$$
$$+ \int_0^1\int_0^1 \lambda g_{xx}(x(s) + \lambda\mu(y_1(s) + y_2(s)), u^{\varepsilon}(s))d\lambda d\mu(y_1(s)$$
$$+ y_2(s))(y_1(s) + y_2(s))\}ds + \int_0^t \{\sigma(x(s), u^{\varepsilon}(s))$$
$$+ \sigma_x(x(s), u^{\varepsilon}(s))(y_1(s) + y_2(s))$$
$$+ \int_0^1\int_0^1 \lambda\sigma_{xx}(x(s) + \lambda\mu(y_1(s) + y_2(s)), u^{\varepsilon}(s))d\lambda d\mu(y_1(s)$$
$$+ y_2(s))(y_1(s) + y_2(s))\}dw_s$$
$$= \int_0^t g(x(s), u(s))ds$$
$$+ \int_0^t \sigma(x(s), u(s))dw_s + \int_0^t g_x(x(s), u(s))(y_1(s)$$
$$+ y_2(s))ds + \int_0^t \sigma_x(x(s), u(s))(y_1(s) + y_2(s))dw_s$$
$$+ \int_0^t \{g(x(s), u^{\varepsilon}(s)) - g(x(s), u(s))\}ds$$
$$+ \int_0^t \{\sigma(x(s), u^{\varepsilon}(s)) - \sigma(x(s), u(s))\}dw_s$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t g_{xx}(x(s), u(s))(y_1(s) + y_2(s))(y_1(s) + y_2(s))ds$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_{xx}(x(s), u(s))(y_1(s) + y_2(s))(y_1(s) + y_2(s))dw_s$$

$$+\int_0^t \{g_x(x(s),u^\varepsilon(s)) - g_x(x(s),u(s))\}(y_1(s)+y_2(s))\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t \{\sigma_x(x(s),u^\varepsilon(s)) - \sigma_x(x(s),u(s))\}(y_1(s)+y_2(s))\mathrm{d}w_s$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 \lambda\{g_{xx}(x+\lambda\mu(y_1+y_2),u^\varepsilon) - g_{xx}(x,u)\}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu$$

$$\times (y_1(s)+y_2(s))(y_1(s)+y_2(s))\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 \lambda\{\sigma_{xx}(x+\lambda\mu(y_1+y_2),u^\varepsilon)$$

$$-\sigma_{xx}(x,u)\}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu(y_1(s)+y_2(s))(y_1(s)+y_2(s))\mathrm{d}w_s$$

$$= x(t) - x_0 + y_1(t) + y_2(t) + \int_0^t G^\varepsilon(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sum{}^\varepsilon(s)\mathrm{d}w_s \tag{4.5.11}$$

其中

$$G^\varepsilon(s) = \frac{1}{2}g_{xx}(x(s),u(s))y_2(s)y_2(s) + g_{xx}(x(s),u(s))y_1(s)y_2(s)$$

$$+ \{g_x(x(s),u^\varepsilon(s)) - g_x(x(s),u(s))\}y_2(s)$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 \lambda\{g_{xx}(x+\lambda\mu(y_1+y_2),u^\varepsilon) - g_{xx}(x,u)\}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu$$

$$\times (y_1(s)+y_2(s))(y_1(s)+y_2(s))$$

$$\sum{}^\varepsilon(s) = \frac{1}{2}\sigma_{xx}(x(s),u(s))y_2(s)y_2(s) + \sigma_{xx}(x(s),$$

$$u(s))y_1(s)y_2(s)$$

$$+ \{\sigma_x(x(s),u^\varepsilon(s)) - \sigma_x(x(s),u(s))\}y_2(s)$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 \lambda\{\sigma_{xx}(x+\lambda\mu(y_1+y_2),u^\varepsilon) - \sigma_{xx}(x,u)\}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu$$

$$\times (y_1(s)+y_2(s))(y_1(s)+y_2(s))$$

用条件(B_1)和(B_2),以及引理 4.2 的估计式(4.5.3)和式(4.5.4),得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E\left|\int_0^t G^\varepsilon(s)\mathrm{d}s\right|^2 = o(\varepsilon^2)$$

$$\sup_{0\le t\le T} E\left|\int_0^t \sum{}^{\varepsilon}(s)\mathrm{d}w_s\right|^2 = o(\varepsilon^2)$$

这里 $o(\varepsilon^2)/\varepsilon^2 \to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$

由式

$$x^{\varepsilon}(t) = x_0 + \int_0^t g(x^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(t))\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(x^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(s))\mathrm{d}w_s$$

减去式(4.5.11)，得

$$\begin{aligned}
x^{\varepsilon}(t) - x(t) - y_1(t) - y_2(t) = &\int_0^t \{g(x^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(s)) \\
&- g(x(s)+y_1(s)+y_2(s),u^{\varepsilon}(s))\}\mathrm{d}s + \int_0^t\{\sigma(x^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(s)) \\
&- \sigma(x(s)+y_1(s)+y_2(s),u^{\varepsilon}(s))\}\mathrm{d}w_s \\
&+ \int_0^t G^{\varepsilon}(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sum{}^{\varepsilon}(s)\mathrm{d}w_s \\
- \int_0^t\int_0^1 g_x(x^{\varepsilon}(s) &+ \lambda(x(s)+y_1(s)+y_2(s)),u^{\varepsilon}(s)) \\
\times \mathrm{d}\lambda(x^{\varepsilon}(s) - x(s) &- y_1(s) - y_2(s)) + \int_0^t\int_0^1 \sigma_x(x^{\varepsilon}(s) \\
&+ \lambda(x(s)+y_1(s)+y_2(s)),u^{\varepsilon}(s))\mathrm{d}\lambda(x^{\varepsilon}(s) - x(s) \\
&- y_1(s) - y_2(s))\mathrm{d}w_s + \int_0^t G^{\varepsilon}(s)\mathrm{d}s + \int_0^t\sum{}^{\varepsilon}(s)\mathrm{d}w_s
\end{aligned} \tag{4.5.12}$$

对满足随机微分方程（4.5.12）的随机过程 $x^{\varepsilon}(t)-x(t)-y_1(t)-y_2(t)$ 和函数 $|y|^2$ 用 Itô 公式和取数学期望，得

$$\begin{aligned}
&E|x^{\varepsilon}(t) - x(t) - y_1(t) - y_2(t)|^2 \\
&= 2E\int_0^t\langle G^{\varepsilon}(s) + \int_0^1 g_x(\cdot,\cdot)\mathrm{d}\lambda(x^{\varepsilon}(s) - x(s) - y_1(s) - y_2(s)), \\
&(x^{\varepsilon}(s) - x(s) - y_1(s) - y_2(s))\rangle\mathrm{d}s \\
&+ E\int_0^t\left|\sum{}^{\varepsilon}(s) + \int_0^1\sigma_x(\cdot,\cdot)\mathrm{d}\lambda(x^{\varepsilon}(s) - x(s)\right. \\
&\left. - y_1(s) - y_2(s))\right|^2\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{4.5.13}$$

其中

$$g_x(\cdot,\cdot)=g_x(x^\varepsilon(s)+\lambda(x(s)+y_1(s)+y_2(s)),u^\varepsilon(s))$$

$$\sigma_x(\cdot,\cdot)=\sigma_x(x^\varepsilon(s)+\lambda(x(s)+y_1(s)+y_2(s)),u^\varepsilon(s))$$

用条件(B_1)和(B_2),存在正常数 g_1,σ_1,$|g_x|\leqslant g_1$,$|\sigma_x|\leqslant\sigma_1$.由式(4.5.13)得

$$E|x^\varepsilon(t)-x(t)-y_1(t)-y_2(t)|^2$$

$$+ h_x(x(T))(y_1(T) + y_2(T))\Big\}$$

$$+ E\int_0^T \{f(x(s),u^\varepsilon(s)) - f(x(s),u(s))\}\mathrm{d}s$$

$$+ \frac{1}{2}Eh_{xx}(x(T))y_1(T)y_1(T)$$

$$+ \frac{1}{2}E\int_0^T f_{xx}(x(s),u(s))y_1(s)y_1(s)\mathrm{d}s \geqslant o(\varepsilon) \quad (4.6.1)$$

这里 $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$

证 由假设 $u(t)$，$x(t)$是最优控制和相应的最优轨道，则有下式

$$E\int_0^T f(x^\varepsilon(s),u^\varepsilon(s))\mathrm{d}s + Eh(x^\varepsilon(T))$$

$$\geqslant E\int_0^T f(x(s),u(s))\mathrm{d}s + Eh(x(T)) \quad \forall \varepsilon \in (0,1)$$

$$(4.6.2)$$

其中 $x^\varepsilon(t)$是相应于容许控制 $u^\varepsilon(t)$的轨道。

由定理 4.5 和不等式(4.6.2)，得

$$0 \leqslant E\int_0^T \{f(x^\varepsilon(s),u^\varepsilon(s)) - f(x(s),u(s))\}\mathrm{d}s$$

$$+ E\{h(x^\varepsilon(T)) - h(x(T))\}$$

$$= E\int_0^T \{f(x(s) + y_1(s) + y_2(s),u^\varepsilon(s)) - f(x(s),u(s))\}\mathrm{d}s$$

$$+ E\{h(x(T) + y_1(T) + y_2(T)) - h(x(T))\} + o(\varepsilon)$$

$$= E\int_0^T \{f_x(x(s),u(s))(y_1(s) + y_2(s))$$

$$+ \frac{1}{2}f_{xx}(x(s),u(s))(y_1(s) + y_2(s))(y_1(s) + y_2(s))\}\mathrm{d}s$$

$$+ E\int_0^T \{f(x(s),u^\varepsilon(s)) - f(x(s),u(s))\}\mathrm{d}s$$

$$+ E\int_0^T \{f_x(x(s),u^\varepsilon(s)) - f_x(x(s),u(s))\}$$

$$\times(y_1(s)+y_2(s))ds+\frac{1}{2}E\int_0^T\{f_{xx}(x(s),u^\varepsilon(s))$$
$$-f_{xx}(x(s),u(s))\}y_1(s)y_1(s)ds+Eh_x(x(T))(y_1(T)+y_2(T))$$
$$+\frac{1}{2}Eh_{xx}(x(T))y_1(T)y_1(T)+o(\varepsilon) \tag{4.6.3}$$

由引理 4.2 的估计式(4.5.3)和式(4.5.4)可得

$$\Big|E\int_0^T\{f_x(x(s),u^\varepsilon(s))-f_x(x(s),u(s))\}(y_1(s)+y_2(s))ds$$
$$+\frac{1}{2}E\int_0^T\{f_{xx}(x(s),u^\varepsilon(s))-f_{xx}(x(s),u(s))\}y_1(s)y_1(s)ds$$
$$+E\int_0^T\{f_{xx}(x(s),u(s))y_1(s)y_2(s)$$
$$+\frac{1}{2}f_{xx}(x(s),u(s))y_2(s)y_2(s)ds\Big|$$
$$=o(\varepsilon) \tag{4.6.4}$$

由式(4.6.3)和式(4.6.4)得式(4.6.1)。　　证毕

现在用 $S(n)$ 表示一切 $n\times n$ 实对称矩阵的空间，在 $S(n)$ 上定义内积

$$(A_1,A_2)_*=\mathrm{tr}(A_1A_2)\quad\forall A_1,A_2\in S(n)$$

其中 $\mathrm{tr}B$ 表示 $n\times n$ 矩阵 B 的迹。

对于控制问题(4.1.1)—(4.1.2)引入 Hamiltonian 函数如下：

$$H(x,u,\psi,\Psi)=f(x,u)+\langle\psi,g(x,u)\rangle$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\langle\Psi_j,\sigma^j(x,u)\rangle \tag{4.6.5}$$

其中，σ^j 表示 $n\times m$ 矩阵 σ 的第 j 个列向量；$\psi\in R^n$，$\Psi=(\Psi_1,\cdots,\Psi_m)$，每一个 $\Psi_j\in R^n$；符号$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示内积。

定理 4.6　在(B_1)，(B_2)和(B_3)的假定下，设 $u(\cdot)\in U_{ad}$是控制问题(4.6.1)—(4.6.2)的最优控制，$x(t)$是相应于 $u(t)$的最优轨道，则存在

$$(\psi(\cdot),\Psi(\cdot))\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n)\times(L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^n))^m$$

$(P(\cdot),Q(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}((0,T),S(n)) \times (L^2_{\mathcal{F}}((0,T),S(n)))^m$

使得$(x(\cdot),u(\cdot))$，$(\psi(\cdot),\Psi(\cdot))$和$(P(\cdot),Q(\cdot))$满足下面的随机微分方程和极值原理：

(1)随机微分方程

$$dx(t)=g(x(t),u(t))dt+\sigma(x(t),u(t))dw_t \qquad (4.6.6)$$

$$x(0)=x_0$$

$$-d\psi(t)=\{f_x(x(t),u(t))+g_x^*(x(t),u(t))\psi(t)$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\sigma_x^{*j}(x(t),u(t))\Psi_j(t)\}dt-\Psi(t)dw_t \qquad (4.6.7)$$

$$\psi(T)=h_x(x(T))$$

$$-dP(t)=\{g_x(x(t),u(t))P(t)+P(t)g_x(x(t),u(t))$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\sigma_x^{*j}(x(t),u(t))P(t)\sigma_x^j(x(t),u(t))$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\sigma_x^{*j}(x(t),u(t))Q_j(t)$$
$$+\sum_{j=1}^{m}Q_j(t)\sigma_x^{*j}(x(t),u(t))$$
$$+H_{xx}(x(t),u(t),\psi(t),\Psi(t))\}dt-Q(t)dw_t$$
$$(4.6.8)$$

$$P(T)=h_{xx}(x(T))$$

(2)极值原理

$$\min_{u\in U}\{H(x(t),u,\psi(t),\Psi(t)-P(t)\sigma(x(t),u(t)))$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma(x(t),u)\sigma^*(x(t),u)P(t))\}$$
$$=\{H(x(t),u(t),\psi(t),\Psi(t)-P(t)\sigma(x(t),u(t)))$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma(x(t),u(t))\sigma^*(x(t),u(t))P(t))\},a.e.t,a.s.$$
$$(4.6.9)$$

其中$H(x,u,\psi,\Psi)$是用式(4.6.5)定义的函数，符号“ * ”表示矩

阵的转置，$Q=(Q_1,\cdots,Q_m)$，每一个 $Q_j\in L^2_{\mathcal{F}}((0,T),S(n))$，$\Psi(t)=(\Psi_1(t),\cdots,\Psi_m(t))$，每一个 $\Psi_j\in L^2_{\mathcal{F}}((0,T),R^n)$

证 对$\forall$ $(\phi(\cdot),\Phi(\cdot))\in L^2_{\mathcal{F}}((0,T),R^n)\times(L^2_{\mathcal{F}}((0,T),R^n))^m$，$\Phi=(\Phi_1,\cdots,\Phi_m)$，考虑线性随机微分方程

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}z(t)=\{g_x(x(t),u(t))z(t)+\phi(t)\}\mathrm{d}t\\
&\qquad+\{\sigma_x(x(t),u(t))z(t)+\Phi(t)\}\mathrm{d}w, \quad (4.6.10)\\
&z(0)=0
\end{aligned}
$$

在 Hilbert 空间 $L^2_{\mathcal{F}}((0,T),R^n)\times(L^2_{\mathcal{F}}((0,T),R^n))^m$ 上定义线性泛函如下

$$
I(\phi,\Phi)=E\left\{\int_0^T f_x(x(t),u(t))z(t)\mathrm{d}t+h_x(x(T))z(T)\right\} \tag{4.6.11}
$$

其中 $z(t)$是相应于$(\phi(\cdot),\Phi(\cdot))$的方程(4.6.10)的解。

容易验证 $I(\phi,\Phi)$是 Hilbert 空间 $L^2_{\mathcal{F}}((0,T),R^n)\times(L^2_{\mathcal{F}}((0,T),R^n))^m$ 上的连续线性泛函。用 Rieze's 表现定理，存在唯一的 $(\psi(\cdot),\Psi(\cdot))\in L^2_{\mathcal{F}}((0,T),R^n)\times(L^2_{\mathcal{F}}((0,T),R^n))^m$，$\Psi(t)=(\Psi_1(t),\cdots,\Psi_m(t))$，使得

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\int_0^T f_x(x(t),u(t))z(t)\mathrm{d}t+h_x(x(T))z(T)\right\}\\
&=E\int_0^T\langle\psi(t),\phi(t)\rangle\mathrm{d}t+E\int_0^T\sum_{j=1}^m\langle\Psi_j(t),\Phi_j(t)\rangle\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

对于一切$(\phi(\cdot),\Phi(\cdot))\in L^2_{\mathcal{F}}((0,T),R^n)\times(L^2_{\mathcal{F}}((0,T),R^n))^m$ (4.6.12)

在方程(4.6.10)中，取

$$
\begin{aligned}
\phi(t)&=g(x(t),u'(t))-g(x(t),u(t))\\
\Phi(t)&=\sigma(x(t),u'(t))-\sigma(x(t),u(t))
\end{aligned}
$$

则方程(4.6.10)就是方程(4.5.1)，因此 $z(t)=y_1(t)$。将此$(\phi(t),\Phi(t))$和 $z(t)=y_1(t)$代入式(4.6.12)，得

$$
E\int_0^T f_x(x(t),u(t))y_1(t)+Eh_x(x(T))y_1(T)
$$

$$= E\int_0^T \langle \psi(t), g(x(t), u^\varepsilon(t)) - g(x(t), u(t)) \rangle \mathrm{d}t$$

$$+ E\int_0^T \mathrm{tr}\{\Psi^*(t)(\sigma(x(t), u^\varepsilon(t)) - \sigma(x(t), u(t)))\}\mathrm{d}t$$

(4.6.13)

同理，在方程(4.6.10)中，取

$$\phi(t) = \frac{1}{2} g_{xx}(x(t), u(t)) y_1(t) y_1(t)$$

$$+ \{g_x(x(t), u^\varepsilon(t)) - g_x(x(t), u(t))\} y_1(t)$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \sigma_{xx}(x(t), u(t)) y_1(t) y_1(t)$$

$$+ \{\sigma_x(x(t), u^\varepsilon(t)) - \sigma_x(x(t), u(t))\} y_1(t)$$

则方程(4.6.10)就是方程(4.5.2)，并且 $z(t) = y_2(t)$。将($\phi(\cdot)$，$\Phi(\cdot)$)和 $z(t) = y_2(t)$ 代入式(4.6.12)，得

$$E\int_0^T f_x(x(t), u(t)) y_2(t) \mathrm{d}t + E h_x(x(T)) y_2(T)$$

$$= \frac{1}{2} E\int_0^T \{\psi(t) g_{xx}(x(t), u(t)) + \sum_{j=1}^m \Psi_j(t) \sigma^j_{xx}(x(t), u(t))\}$$

$$\times y_1(t) y_1(t) \mathrm{d}t + E\int_0^T \langle \psi(t), (g_x(x(t), u^\varepsilon(t))$$

$$- g_x(x(t), u(t))) y_1(t) \rangle \mathrm{d}t + E\int_0^T \sum_{j=1}^m \Psi_j^*(t)(\sigma^j_x(x(t), u^\varepsilon(t))$$

$$- \sigma^j_x(x(t), u(t))) y_1(t) \mathrm{d}t \qquad (4.6.14)$$

用引理 4.2 关于 $y_1(t)$ 的估计式，得

$$\Big| E\int_0^T \langle \psi(t), (g_x(x(t), u^\varepsilon(t)) - g_x(x(t), u(t))) y_1(t) \rangle \mathrm{d}t$$

$$+ E\int_0^T \sum_{j=1}^m \Psi_j^*(t)(\sigma^j_x(x(t), u^\varepsilon(t)) - \sigma^j_x(x(t), u(t))) y_1(t) \mathrm{d}t \Big|$$

$$= o(\varepsilon) \qquad (4.6.15)$$

将式(4.6.13)和式(4.6.14)代入式(4.6.1)，用式(4.6.15)，得

$$
\begin{aligned}
& E\int_0^T \{H(x(t),u^\varepsilon(t),\psi(t),\Psi(t)) \\
& - H(x(t),u(t),\psi(t),\Psi(t))\}\mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}E\int_0^T y_1^*(t)H_{xx}(x(t),u(t),\psi(t),\Psi(t))y_1(t)\mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}E(y_1^*(T)h_{xx}(x(T))y_1(T)) \geqslant o(\varepsilon) \qquad (4.6.16)
\end{aligned}
$$

对矩阵值的过程

$$
Y(t) = y_1(t)y_1^*(t) = \begin{pmatrix} y_1^1 y_1^1, & \cdots, & y_1^1 y_1^n \\ \vdots & & \\ y_1^n y_1^1, & \cdots, & y_1^n y_1^n \end{pmatrix}
$$

用 Itô 公式，得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}Y(t) = & \{Y(t)g_x^*(x(t),u(t)) + g_x(x(t),u(t))Y(t) \\
& + \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(x(t),u(t))Y(t)\sigma_x^{j*}(x(t),u(t)) + \Phi^\varepsilon(t)\}\mathrm{d}t \\
& + \{Y(t)\sigma_x^*(x(t),u(t)) + \sigma_x(x(t),u(t))Y(t) \\
& + \Psi^\varepsilon(t)\}\mathrm{d}w, \qquad (4.6.17)
\end{aligned}
$$

$$
Y(0) = 0
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\Phi^\varepsilon(t) = & y_1(t)(g(x(t),u^\varepsilon(t)) - g(x(t),u(t)))^* \\
& + (g(x(t),u^\varepsilon(t)) - g(x(t),u(t)))y_1^*(t) \\
& + \sigma_x(x(t),u(t))y_1(t)(\sigma(x(t),u^\varepsilon(t)) - \sigma(x(t),u(t)))^* \\
& + (\sigma(x(t),u^\varepsilon(t)) - \sigma(x(t),u(t)))y_1^*(t)\sigma_x^*(x(t),u(t)) \\
& + (\sigma(x(t),u^\varepsilon(t)) - \sigma(x(t),u(t)))(\sigma(x(t),u^\varepsilon(t)) \\
& - \sigma(x(t),u(t)))^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi^\varepsilon(t) = & y_1(t)(\sigma(x(t),u^\varepsilon(t)) - \sigma(x(t),u(t)))^* \\
& + (\sigma(x(t),u^\varepsilon(t)) - \sigma(x(t),u(t)))y_1^*(t)
\end{aligned}
$$

对 $\forall\ (p(\cdot),q(\cdot)) \in L_{\mathcal{F}}^2((0,T),S(n)) \times (L_{\mathcal{F}}^2((0,T),S(n)))^m$，$q(t) = (q_1(t),\cdots,q_m(t))$，考虑在空间 $S(n)$ 中取值的过

程 $Z(t)$ 的线性随机微分方程

$$
\begin{aligned}
dZ(t) = & \{Z(t)g_x(x(t),u(t)) + g_x(x(t),u(t))Z(t) \\
& + \sum_{j=1}^{m} \sigma_x^j(x(t),u(t))Z(t)\sigma_x^{*j}(x(t),u(t)) + p(t)\}dt \\
& + \{Z(t)\sigma_x^*(x(t),u(t)) + \sigma_x(x(t),u(t))Z(t) \\
& + q(t)\}dw,
\end{aligned}
\tag{4.6.18}
$$

$$Z(0) = 0$$

在 Hilbert 空间 $L_{\mathscr{F}}^2((0,T),S(n)) \times (L_{\mathscr{F}}^2((0,T),S(n)))^m$ 上定义线性泛函

$$
\begin{aligned}
I(p(\cdot),q(\cdot)) = & \frac{1}{2}E\int_0^T (Z(t),H_{xx}(t))_s dt \\
& + \frac{1}{2}E(Z(T),h_{xx}(x(T))),
\end{aligned}
$$

其中，$Z(t)$ 是相应于 $(p(\cdot),q(\cdot))$ 的方程(4.6.18)的解，$H_{xx}(t) = H_{xx}(x(t),u(t),\psi(t),\Psi(t))$

线性泛函 $I(p(\cdot),q(\cdot))$ 是连续的，依 Rieze's 表现定理，存在唯一的

$$(P(\cdot),Q(\cdot)) \in L_{\mathscr{F}}^2((0,T),S(n)) \times (L_{\mathscr{F}}^2((0,T),S(n)))^m$$

$Q(t) = (Q_1(t),\cdots,Q_m(t))$，使得

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}E\int_0^T (Z(t),H_{xx}(t))_s dt + \frac{1}{2}E(Z(T),h_{xx}(x(T))), \\
= & E\int_0^T (P(t),p(t))_s dt + E\int_0^T \sum_{j=1}^{m} (Q_j(t),q_j(t))_s dt
\end{aligned}
\tag{4.6.19}
$$

依 $S(n)$ 空间的内积的定义，有

$$
\begin{aligned}
(Y(t),H_{xx}(t))_s & = (y_1(t)y_1^*(t),H_{xx}(t)), \\
& = \operatorname{tr}\{(y_1(t)y_1^*(t))H_{xx}(t)\} \\
& = y_1^*(t)H_{xx}(t)y_1(t)
\end{aligned}
$$

在方程(4.6.18)中，取 $p(t) = \Phi'(t)$，$q(t) = \Psi'(t)$ 时，方程(4.

6.18)就是方程(4.6.17),并且 $Z(t)=Y(t)$,代入式(4.6.19),得

$$\frac{1}{2}E\int_0^T y_1^*(t)H_{xx}(t)y_1(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}Ey_1^*(T)h_{xx}(x(T))y_1(T)$$

$$=E\int_0^T(P(t),\Phi^\varepsilon(t))_*\mathrm{d}t+E\int_0^T\sum_{j=1}^m(Q_j(t),\Psi_j^\varepsilon(t))_*\mathrm{d}t \tag{4.6.20}$$

将式(4.6.20)代入式(4.6.16),得

$$E\int_0^T\{H(x(t),u^\varepsilon(t),\psi(t),\Psi(t))$$

$$-H(x(t),u(t),\psi(t),\Psi(t))\}\mathrm{d}t+E\int_0^T(P(t),\Phi^\varepsilon(t))_*\mathrm{d}t$$

$$+E\int_0^T\sum_{j=1}^m(Q_j(t),\Psi_j^\varepsilon(t))_*\mathrm{d}t\geqslant o(\varepsilon) \tag{4.6.21}$$

将 $\Phi^\varepsilon(t)$,$\Psi^\varepsilon(t)$的表达式代入式(4.6.21)、用引理4.2的估计式(4.5.3),得

$$E\int_0^T\{H(x(t),u^\varepsilon(t),\psi(t),\Psi(t))-H(x(t),u(t),\psi(t),$$

$$\Psi(t))\}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}E\int_0^T\mathrm{tr}\{(\sigma(x(t),u^\varepsilon(t))-\sigma(x(t),u(t)))^*P(t)$$

$$\times(\sigma(x(t),u^\varepsilon(t))-\sigma(x(t),u(t)))\}\mathrm{d}t\geqslant o(\varepsilon)$$

用 $u^\varepsilon(t)$的定义,上式可写为

$$\frac{1}{\varepsilon}E\int_\tau^{\tau+\varepsilon}\{[H(x(t),v,\psi(t),\Psi(t))-H(x(t),u(t),$$

$$\psi(t),\Psi(t))]+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[(\sigma(x(t),v)-\sigma(x(t),u(t)))^*P(t)$$

$$\times(\sigma(x(t),v)-\sigma(x(t),u(t)))]\}\mathrm{d}t\geqslant o(1)$$

现在让 τ 是上式的被积式{·}中函数的 Lebesgue 点,这种 Lebesgue 点的全体的 Lebesgue 测度等于 T。注意到 v 不依赖于 t。从而上面的不等式让 $\varepsilon\downarrow 0$,得

$$H(x(t),v,\psi(t),\Psi(t))-H(x(t),u(t),$$

$$\psi(t),\Psi(t)) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[(\sigma(x(t),v) - \sigma(x(t),u(t)))^* P(t)$$
$$\times (\sigma(x(t),v) - \sigma(x(t),u(t)))]$$
$$\geqslant 0 \quad a.e.t,a.s. \quad \forall v \in U$$

上式写成等价形式为

$$H(x(t),v,\psi(t),\Psi(t) - P(t)\sigma(x(t),u(t)))$$
$$+ \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma(x(t),v)\sigma^*(x(t),v)P(t))$$
$$\geqslant H(x(t),u(t),\psi(t),\Psi(t) - P(t)\sigma(x(t),u(t)))$$
$$+ \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma(x(t),u(t))\sigma^*(x(t),u(t))P(t)),a.e.t,a.s.$$
$$\forall v \in U$$

这就证明了极值原理(4.6.9)。

对于$(\psi(t),\Psi(t))$满足方程(4.6.7),已经在定理4.4中证明了。

关于$(P(t),Q(t))$满足方程(4.6.8)的问题,注意到方程(4.6.8)与(4.6.7)有相同的结构,$(\psi(t),\Psi(t))$满足方程(4.6.7)的在定理4.4的证明过程,也就证明了$(P(t),Q(t))$满足方程(4.6.8)。

证毕

第五章 具有完全观测信息的随机系统的最优控制

(动态规划法)

本章将要研究的仍然是具有完全观测信息的随机系统的最优控制问题。研究的问题与第四章的问题一样，但是研究问题的方法与第四章完全不同。本章研究这一问题的基本方法是动态规划法。这个方法是把一个随机系统的最优控制问题，考虑成按随机系统的确定性初始值参数化了的一族控制系统的最优控制问题。由这一族的最优控制问题的性能指标的最优值函数，引导出一个非线性算子半群，从这一个非线性算子半群的生成算子和可微性，便可得到随机控制问题的 HJB 偏微分方程。与确定性的最优控制问题的 HJB 偏微分方程不同，随机系统的最优控制问题的 HJB 偏微分方程关于空间变量，是二阶的非线性偏微分方程。用 80 年代发展起来的粘性解的概念和理论，使得随机控制问题的相应的 HJB 偏微分方程的解是存在唯一的。从而随机控制问题的动态规划方法有可靠的数学理论基础。

§5.1 问题的叙述和准备知识

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个概率空间，$w_t, t\geqslant 0$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 k 维 Wienet 过程。$\mathscr{F}_t=\sigma(w_s,s\leqslant t)$是由 Wiener 过程 w_t 产生的 σ-域族$\{\mathscr{F}_t\}$，每个 σ-域 $\mathscr{F}_t$ 都是完备化了的。设 U 是 r 维欧氏空间 R^r 中的一个子集。

用 $S(k)$表示 $k\times k$ 矩阵的全体的集合。已给下面几个函数：

$$g(\cdot,\cdot): R^k \times U \to R^k$$
$$\sigma(\cdot,\cdot): R^k \times U \to S(k)$$
$$f(\cdot,\cdot): R^k \times U \to R^1$$
$$h(\cdot): R^k \to R^1$$
$$C(\cdot,\cdot): R^k \times U \to R^1_+ = [0,\infty)$$

考虑下面的最优控制问题：受控对象用下面的随机微分方程来描述

$$dx(t) = g(x(t),u(t))dt + \sigma(x(t),u(t))dw, \quad (5.1.1)$$
$$x(0) = x_0 \in R^k$$

其中，$x(t)=x(t,\omega)$是状态变量；k 维的随机过程，$u(t)=u(t,\omega)$是控制变量；r 维的随机过程。

受控系统(5.1.1)的性能指标为

$$V(t,x,h,u(\cdot)) = E\left\{\int_0^t f(x(s),u(s))e(0,s,u(\cdot))ds + h(x(t))e(0,t,u(\cdot))\right\} \quad (5.1.2)$$

其中

$$e(0,t,u(\cdot)) = \exp\left(-\int_0^t C(x(s),u(s))ds\right) \quad (5.1.3)$$

和 $x(t)=x(t,x,u(\cdot))$表示微分方程(5.1.1)的解依赖于初值 x 和控制 $u(\cdot)$。

定义容许控制类：

$U_{ad}=\{u(t)=u(t,\omega)\,|\,u(\cdot,\cdot): R^1_+\times\Omega\to R^r, u(t)$是对 σ-域族$\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$适应的可测过程，$u(t,\omega)\in U, a.e.\, t, a.s.\}$每一个 $u(\cdot)\in U_{ad}$称为容许控制。

随机控制问题是寻求 $u^*(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$V(t,x,h,u^*(\cdot)) = \sup_{u(\cdot)\in U_{ad}} V(t,x,h,u(\cdot))$$

$u^*(\cdot)$称为控制问题(5.1.1)—(5.1.2)的最优控制，相应于 $u^*(\cdot)$的随机微分方程(5.1.1)的解 $x^*(t)=x(t,\omega,u^*(\cdot))$称为最优轨道。

约定

$$V(t,x,h)=\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}} V(t,x,h,u(\cdot))$$

假定

(A_1)　存在不依赖于 x,u 的正常数 K，使得

$|\hat{g}(x,u)-\hat{g}(y,u)|\leqslant K|x-y|, \forall x,y\in R^k, u\in U$

对 $\hat{g}=\sigma_{ij},g_i,f$ 和 C 都成立，其中 $\sigma_{ij}(i,j=1,\cdots,k)$是矩阵 σ 的元，$\sigma=(\sigma_{ij}),g=(g_1,\cdots,g_k)'$

命题 5.1　在(A_1)的假定下，随机微分方程(5.1.1)存在唯一解 $x(t)=x(t,x,u(\cdot))$，这个解是初值 x 和$(u_s,s\leqslant t)$的 Borel 函数。并且对任意的 $T>0$，存在不依赖于 x 和 $t\leqslant T$ 以及 $u(\cdot)$的正常数 K_1,K_2 和 K_3，使得下面的估计式成立：

(1)$E|x(t,x,u(\cdot))|^2\leqslant K_1(|x|^2+t^2+t), \forall x\in R^k, t\in[0,T]$

(2)$E|x(t,x,u(\cdot))-x(s,x,u(\cdot))|^2\leqslant K_2(|t-s|^2+|t-s|)\quad \forall x\in R^k, t,s\in[0,T]$

(3)$E|x(t,x,u(\cdot))-x(t,z,u(\cdot))|^2\leqslant e^{K_3t}|x-z|^2\quad \forall x,z\in R^k, t\in[0,T]$

在(A_1)假定下，随机微分方程(5.1.1)的存在唯一解的结果，在定理 4.1 已证。估计式(1)，(2)和(3)可直接用条件(A_1)进行估计。

用 $B(R^k)$表示在空间 R^k 上一致连续的有界函数的全体。

命题 5.2　在(A_1)条件下，$\forall u\in U, f(\cdot,u)\in B(R^k), h(\cdot)\in B(R^k)$，则

(1)对 $u(\cdot)\in U_{ad}$ 一致地有 $V(\cdot,\cdot,h,u(\cdot))\in B([0,T]\times R^k)$

(2)$V(\cdot,\cdot,h)\in B([0,T]\times R^k)$

证　依命题 5.1，方程(5.1.1)的解 $x(t,x,u(\cdot))$对$(t,x)\in R_+^1\times R^k$ 是连续的，从而由假设 $f(\cdot,u)\in B(R^k), h(\cdot)\in B(R^k)$ 得$V(\cdot,\cdot,h,u(\cdot))\in B([0,T]\times R^k)$，对 $u(\cdot)\in U_{ad}$ 一致地成

立。依 $V(t,x,h)$ 的定义，可得 $V(\cdot,\cdot,h)\in B([0,T]\times R^d)$。

证毕

引理 5.1 设 U 有界或 U 包含 R^r 的坐标原点，则对任一 $u(\cdot)\in U_{ad}$，存在列 $\{u_k(\cdot)\}_1^\infty\subset U_{ad}$，使得每一 $u_k(t)$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$，$t\in[0,T]$ 适应的可测过程，$u_k(t,\omega)$ 作为 t 的函数是阶段函数，并且

$$E\int_0^T|u_k(s)-u(s)|^2\mathrm{d}s\to 0(k\to\infty)$$

证 任一 $u(\cdot)\in U_{ad}$，如果 U 包含 R^r 的坐标原点，不失一般性，可假定 $|u(t,\omega)|\leqslant c$，$a.e.\ t$，$a.s.$，c 是正常数。否则 $u^N(t,\omega)=u(t,\omega)\chi_{\{|u(t,\omega)|\leqslant N\}}$ 时，则 $\forall N$，$u^N(\cdot)\in U_{ad}$，$|u^N(t,\omega)|\leqslant N$，并且

$$E\int_0^T|u^N(t,\omega)-u(t,\omega)|^2\mathrm{d}t\to 0(N\to\infty)$$

其中 χ_A 表示集 A 的示性函数。

因此，若 U 有界或 $0\in U$，$\forall u(\cdot)\in U_{ad}$，都可认为 $u(t,\omega)$ 有界，这不失一般性。

对 $t<0$，令 $u(t,\omega)=u(0,\omega)$。对 $t\geqslant T$，令 $u(t,\omega)=u(T,\omega)$。因此，$u(t,\omega)$ 延拓成为 $R^1=(-\infty,\infty)$ 上的函数。

令 $\quad\psi_n(t)=i2^{-n}$，当 $i2^{-n}<t<(i+1)2^{-n}$，$i=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

对固定 τ，约定

$$u_n(t,\omega)=u(\psi_n(t-\tau)+\tau,\omega)$$

则 $\forall n$，$u_n(t,\omega)$ 对 $\{\mathscr{F}_t\}$，$t\in[0,T]$ 适应的可测过程，$u_n(\cdot)\in U_{ad}$ 和每一个 $u_n(t,\omega)$ 作为 t 的函数是阶段函数。

对 $u(\cdot,\cdot)$ 定义过程

$$\tilde{u}(t,\omega)=\int_0^t u(s,\omega)\mathrm{d}s$$

则 $\tilde{u}(t,\omega)$ 是对 $\{\mathscr{F}_t\}$，$t\in[0,T]$ 连续的适应可测过程。

约定

$$\tilde{u}_m(t,\omega)=m\int_{\left(t-\frac{1}{m}\right)\vee 0}^t u(s,\omega)\mathrm{d}s$$

$$= \left\{ \hat{u}(t,\omega) - \hat{u}\left(\left(t - \frac{1}{m} \right) \vee 0, \omega \right) \right\} m$$

则 $\hat{u}_m(t,\omega)$ 也是对 $\{\mathscr{F}_t\}$，$t \in [0,T]$ 适应可测连续过程。

对几乎一切 $t \in [0,T]$，$\hat{u}(t,\omega)$ 有导数 $\hat{u}'(t,\omega) = u(t,\omega)$，并且

$$u'(t,\omega) = \lim_{m\to\infty} \left[\hat{u}(t,\omega) - \hat{u}\left(\left(t - \frac{1}{m} \right) \vee 0, \omega \right) \right] m = \lim_{m\to\infty} \hat{u}_m(t,\omega)$$

所以对几乎一切 (t,ω) 有

$$\lim_{m\to\infty} \hat{u}_m(t,\omega) = u(t,\omega)$$

用控制收敛定理，得

$$E\int_0^T |\hat{u}_m(t,\omega) - u(t,\omega)|^2 \mathrm{d}t \to 0 \quad (m \to \infty)$$

用 Minkovsky 不等式，得

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \left\{ E\int_0^T |u(s+h,\omega) - u(s,\omega)|^2 \mathrm{d}s \right\}^{1/2}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{h\to 0}} \left\{ E\int_0^T |\hat{u}_m(s+h,\omega) - \hat{u}_m(s,\omega)|^2 \mathrm{d}s \right\}^{1/2}$$

$$+ \overline{\lim_{h\to 0}} \left\{ E\int_0^T |\hat{u}_m(s+h,\omega) - u(s+h,\omega)|^2 \mathrm{d}s \right\}^{1/2}$$

$$+ \overline{\lim_{h\to 0}} \left\{ E\int_0^T |\hat{u}_m(s,\omega) - u(s,\omega)|^2 \mathrm{d}s \right\}^{1/2} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

因为 $\psi_n(t) \to t \ (n \to \infty)$，由此和上式得

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T |u(s+\psi_n(t),\omega) - u(s+t,\omega)|^2 \mathrm{d}s = 0$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T\int_0^T |u(s+\psi_n(t),\omega) - u(s+t,\omega)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t = 0$$

从上式存在子列 $\{u(s+\psi_{n_k}(t),\omega)\}$，使得

$$\{u(s+\psi_{n_k}(t),\omega) - u(s+t,\omega)\}^2 \to 0 \quad (k \to \infty)$$

a.e. t, s, a.s.。

记上式不收敛于零的例外集为 A，则

$$\int_0^T\int_0^T\int_\Omega \chi_A \mathrm{d}P\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = 0$$

其中，χ_A 表示集 A 的示性函数。

作为 τ 的函数，由上式得

$$\int_0^T\int_\Omega \chi_A \mathrm{d}P\mathrm{d}s = 0, a.e.\ \tau$$

所以存在 $\hat{\tau}$，对几乎所有的 (s,ω) 有

$$\{u(\hat{\tau} + \psi_{n_k}(s-\hat{\tau}),\omega) - u(s,\omega)\}^2 \to 0 \quad (k\to\infty)$$

用控制收敛定理得

$$\lim_{k\to\infty} E\int_0^T |u(\hat{\tau} + \psi_{n_k}(s-\hat{\tau}),\omega) - u(s,\omega)|^2 \mathrm{d}s = 0$$

令

$$u_k(s) = u(\tau + \psi_{n_k}(s-\hat{\tau}),\omega)$$

则 $\forall\ k, u_k(t)$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}, t\in[0,T]$ 可测的适应过程，作为 t 的函数是阶段函数，并且 $u_k(t)\in U, a.e.\ t\in[0,T], a.s.$ 故 $\{u_k(t)\}_1^\infty$ 是具有引理要求性质的函数列。　证毕

本章主要是阐述动态规划法的理论框架，而不是条件的强弱，有的条件还可弱些。

假定

(A_2)　对 $F=g,\sigma,f$ 和 C 满足条件：

$$|F(x_1,u_1) - F(x_2,u_2)| \leqslant K|x_1 - x_2| + \rho(|u_1 - u_2|) \tag{5.1.4}$$

$$|F(x,u)| \leqslant b$$

其中 K,b 都是正常数，$\rho(\cdot)$ 是连续增函数，$\rho(0)=0$，不妨假定 $\rho\leqslant 2b$。

引理 5.2　在 (A_2) 的 (5.1.4) 条件下，任意的 $u_i(\cdot)\in U_{ad}(i=1,2)$，$x_i(t)$ 是相应于 $u_i(t)$ 的具有初始状态 $x_i(0)=x\ (i=1,2)$ 的方程 (5.1.1) 的解，则

$$E|x_1(t) - x_2(t)|^2 \leqslant \int_0^t 4e^{(4K^2+1)(t-s)}\rho^2(|u_1(s) - u_2(s)|)\mathrm{d}s$$

证　令 $y(s)=x_1(s)-x_2(s)$。用 Itô 公式得

$$E|y(t)|^2 = 2E\int_0^t \langle y(s),\Delta g(s)\rangle \mathrm{d}s + E\int_0^t \mathrm{tr}(\Delta\sigma(s))^2 \mathrm{d}s \tag{5.1.5}$$

这里

$$\Delta g(s) = g(x_1(s),u_1(s)) - g(x_2(s),u_2(s))$$
$$\Delta\sigma(s) = \sigma(x_1(s),u_1(s)) - \sigma(x_2(s),u_2(s))$$

则由式(5.1.5)得

$$E|y(t)|^2 \leqslant (4K^2+1)\int_0^t E|y(s)|^2 \mathrm{d}s + 4E\int_0^t \rho^2(|u_1(s)-u_2(s)|)\mathrm{d}s$$

用 Gronwall's 不等式得引理的估计式。　　证毕

引理 5.3　在引理 5.2 的假定下，让 $x_k(t)=x(t,x,u_k(\cdot))$，$x(t)=x(t,x,u(\cdot))$是相应于 $u_k(\cdot)\in U_{ad}$，$u(\cdot)\in U_{ad}$的方程(5.1.1)的解。如果对$\forall\, t$，有

$$\int_0^t E|u_k(s)-u(s)|^2 \mathrm{d}s \to 0 \quad (k\to\infty)$$

则

$$\int_0^t E\rho^2(|u_k(s)-u(s)|)\mathrm{d}s \to 0 \quad (k\to\infty)$$

因此，用引理 5.2，有

$$E|x_k(t)-x(t)|^2 + \int_0^t E|x_k(s)-x(s)|^2 \mathrm{d}s \to 0 \quad (k\to\infty)$$

证　对任意的 $\varepsilon>0$，让 $\delta>0$，用函数 $\rho(x)$的连续性和 $\rho(0)=0$，使得 $\rho^2(\delta)<\varepsilon$。令

$$e_k = \{(s,\omega)\,|\,(s,\omega)\in[0,T]\times\Omega,\ |u_k(s,\omega)-u(s,\omega)|\geqslant\delta\}$$

则

$$\int_0^t E\rho^2(|u_k(s)-u(s)|)\mathrm{d}s = \int_{e_k}\rho^2(|u_k(s)-u(s)|)\mathrm{d}s\mathrm{d}P + \int_{e_k^c}\rho^2(|u_k(s)-u(s)|)\mathrm{d}s\mathrm{d}P \leqslant 4b^2 \mathrm{mes}\ e_k + \varepsilon t$$

这里 e_k^c 表示集合 e_k 的补集。

用集 e_k 的定义，有

$$\int_0^t E|u_k(s)-u(s)|^2\mathrm{d}s=\int_{e_k}|u_k(s)-u(s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}P+\int_{e_k^c}|u_k(s)-u(s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}P\geqslant\delta^2\mathrm{mes}\ e_k$$

由上面两式得

$$\int_0^t E\rho^2(|u_k(s)-u(s)|)\mathrm{d}s\leqslant 4b^2\delta^{-2}\int_0^t E|u_k(s)-u(s)|\mathrm{d}s+\varepsilon t$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性得证。

证毕

引理 5.4 对任意的 $u(\cdot)\in U_{ad}$，存在列 $\{u_k(\cdot)\}_1^\infty\subset\tilde{U}_{ad}$，使得

$$V(t,x,h,u_k(\cdot))\to V(t,x,h,u(\cdot))(k\to\infty)\quad\forall\ t,x,h \tag{5.1.6}$$

记 $\tilde{U}_{ad}=\{u(t)\,|\,u(t)\in U_{ad},u(t)$是 t 的阶段函数$\}$

则

$$V(t,x,h)=\sup_{u(\cdot)\in\tilde{U}_{ad}}V(t,x,h,u(\cdot))$$

证 对任意的 $u(\cdot)\in U_{ad}$，依引理 5.1，存在列 $\{u_k(\cdot)\}_1^\infty\subset\tilde{U}_{ad}$，使得对一切 $t\leqslant T$，有

$$\int_0^t E|u_k(s)-u(s)|^2\mathrm{d}s\to 0\quad(k\to\infty)$$

用 f、c 和 h 满足条件(5.1.4)，由引理 5.3 和控制收敛定理得式(5.1.6)。

证毕

引理 5.5 对固定 $T>0$，函数 $V(t,x,h)$ 对 $(t,x)\in[0,T]\times R^k$ 一致连续。特别地

$$\sup_{x\in R^k}|V(t,x,h)-V(s,x,h)|\to 0\quad(t\to s)$$

证 记 $x(t)=x(t,x,u(\cdot))$，$y(t)=y(t,y,u(\cdot))$。用定义有

$$|V(t,x,h,u(\cdot))-V(t,y,h,u(\cdot))|$$

$$= E\left\{\left|\int_0^t f(x(s),u(s))e_{x(\cdot)}(0,s,u(\cdot))\mathrm{d}s\right.\right.$$

$$-\int_0^t f(y(s),u(s))e_{y(\cdot)}(0,s,u(\cdot))\mathrm{d}s$$

$$\left.\left.+h(x(t))e_{x(\cdot)}(0,t,u(\cdot))-h(x(t))e_{y(\cdot)}(0,t,u(\cdot))\right|\right\}$$

$$\leqslant c_1\int_0^t E\left|f(x(s),u(s))-f(y(s),u(s))\right|\mathrm{d}s$$

$$+c_2\int_0^t E\left|e_{x(\cdot)}(0,s,u(\cdot))-e_{y(\cdot)}(0,s,u(\cdot))\right|\mathrm{d}s$$

$$+c_3E\left|h(x(t))-h(y(t))\right|$$

$$+c_4E\left|e_{x(\cdot)}(0,t,u(\cdot))-e_{y(\cdot)}(0,t,u(\cdot))\right| \qquad (5.1.7)$$

这里 c_1,c_2,c_3 和 c_4 是与 $u(\cdot),x,y$ 无关的正常数。

用命题5.1和条件(5.1.4),式(5.1.7)的右端每一项$\to0(|x-y|\to0)$对 $u(\cdot)\in U_{ad}$ 一致地成立。换言之,对 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon,h,T)>0$,使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}}\left|V(t,x,h,u(\cdot))-V(t,y,h,u(\cdot))\right|<\varepsilon$$

$$\text{当 } |x-y|<\delta \qquad (5.1.8)$$

用 $V(t,x,h,u(\cdot))$ 的定义有

$$|V(t,x,h,u(\cdot))-V(s,x,h,u(\cdot))|$$

$$\leqslant E\left|\int_s^t f(x(\tau),u(\tau))e_{x(\cdot)}(0,\tau,u(\cdot))\mathrm{d}\tau\right|$$

$$+E\left|e_{x(\cdot)}(s,t,u(\cdot))(h(x(t))-h(x(s)))\right|$$

$$+E\left|h(x(t))-h(x(s))\right|$$

$$\leqslant c_5|t-s|+c_6\left|e_{x(\cdot)}(s,t,u(\cdot))-1\right|$$

$$+E\left|h(x(t))-h(x(s))\right|\to0\quad(|t-s|\to0)$$

因此,存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon,h,T)>0$,使得

$$\sup_{x\in R^k}\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}}\left|V(t,x,h,u(\cdot))-V(s,x,h,u(\cdot))\right|<\varepsilon,$$

$|t-s|<\delta_1,t,s\leqslant T$。 证毕

§5.2 非线性算子半群与 Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程

本节将从指标泛函的值函数引导出一个非线性算子半群的生成算子与 HJB 偏微分方程间的关系来导出 HJB 偏微分方程。

记

$$C_0[0,t] = \{w(s)\,|\,w(\cdot) \in C([0,t] \to R^k), w(0) = 0\}$$

$$\forall\ w(\cdot) \in C_0[0,t], 令$$

$$\| w \| = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |w(s)|$$

则 $C_0[0,t]$ 是一个 Banach 空间。用 $\mathscr{B}_t(C_0)$ 表示 $C_0[0,t]$ 的拓扑 Borel 域，任一 $A \in \mathscr{B}_t(C_0)$，定义

$$\mu_t(A) = P(\omega; w(\cdot,\omega) \in A)$$

称 μ_t 为 $C_0[0,t]$ 上的 Wiener 测度，$(C_0[0,t], \mathscr{B}_t(C_0), \mu_t)$ 是一个 Wiener 空间。在测度 μ_t 之下，坐标投影过程 $W(s,\cdot)$

$$W(s,w) = w(s) \quad 0 \leqslant s \leqslant t, w(\cdot) \in C_0[0,t]$$

是直到时刻 t 的 Wiener 过程。

$\forall\ t_1,\cdots,t_k \in [0,t]$，$k$ 是任一正整数，定义映射

$$\Pi_{t_1,\cdots,t_k}: x(\cdot) \to (x(t_1),\cdots,x(t_k))$$

是从 $C_0[0,t]$ 到 R^k 的连续映射。对 R^k 中的任意的 Borel 集 $H \in \mathscr{B}^k(R^k)$，称 $\Pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_k}(H)$ 为 $C_0[0,t]$ 中的有穷维柱集。

令

$$\mathscr{F}_c = \{\Pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_k}(H)\,|\,\forall\ H \in \mathscr{B}^k(R^k), \forall\ k \geqslant 1, t_1,\cdots,t_k \in [0,t]\}$$

用 $\sigma(\mathscr{F}_c)$ 表示包含 $\mathscr{F}_c$ 的最小 σ-域。

命题 5.3 $\mathscr{B}_t(C_0) = \sigma(\mathscr{F}_c)$

证 $\forall\ t_1,\cdots,t_k \in [0,t], k \geqslant 1, \Pi_{t_1,\cdots,t_k}$ 是连续映射。因此 $\forall\ H \in \mathscr{B}^k(R^k)$，$\Pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_k}(H) \in \mathscr{B}_t(C_0) \Rightarrow \mathscr{F}_c \subset \mathscr{B}_t(C_0)$，因此 $\sigma(\mathscr{F}_c) \subseteq \mathscr{B}_t(C_0)$

另一方面，空间 $C_0[0,t]$ 是可分的 Banach 空间，$C_0[0,t]$ 的每

一开集是可数个闭球之并。因此，只须证$\forall x(\cdot)\in C_0[0,t]$，$C_0[0,t]$中以$x(\cdot)$为心，$\varepsilon$为半径之闭球$\overline{S(x,\varepsilon)}\subseteq\sigma(\mathscr{F}_c)$，则每一开集$G\subset C_0[0,t]$，$G\in\sigma(\mathscr{F}_c)$。因此，一切$C_0[0,t]$中的开集全体包含在$\sigma(\mathscr{F}_c)$中，则$\mathscr{B}_t(C_0)\subseteq\sigma(\mathscr{F}_c)$。这就得到$\sigma(\mathscr{F}_c)=\mathscr{B}_t(C_0)$。但是

$$\overline{S(x,\varepsilon)}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{1\leqslant n\leqslant m}\left\{y(\cdot)\,\middle|\,\left|x\left(\frac{it}{n}\right)-y\left(\frac{it}{n}\right)\right|\leqslant\varepsilon,i=1,\cdots,n\right\}\in$$

$\mathscr{F}_c$，而$\mathscr{F}_c\subset\sigma(\mathscr{F}_c)$。 证毕

设s,t满足关系$0\leqslant s\leqslant t$固定。定义映射：

$$T:C_0[0,t]\to C_0[0,s]\times C_0[0,t-s]$$

对$\forall w(\cdot)\in C_0[0,t]$，有

$$Tw=(w_1(\cdot),w_2(\cdot))\in C_0[0,s]\times C_0[0,t-s]$$

这里$w_1(\tau)=w(\tau)$，$\tau\in[0,s]$，$w_2(\tau)=w(s+\tau)-w(s)$，$0\leqslant\tau\leqslant t-s$。

映射T是从空间$C_0[0,t]$到空间$C_0[0,s]\times C_0[0,t-s]$的同构映射。Wiener过程$W(s,w)$是独立增量过程。所以，$\forall A\in\mathscr{B}(C_0[0,s])$，$B\in\mathscr{B}(C_0[0,t-s])$，有

$$\mu_t(w:Tw=(w_1(\cdot),w_2(\cdot))\in A\times B)=\mu_s(A)\times\mu_{t-s}(B)\tag{5.2.1}$$

引理 5.6 对任一$u(\cdot)\in\hat{U}_{ad}$，存在一可测映射$u^*:[0,\infty)\times C_0[0,\infty)\to U$，$u^*(t,w)$对由坐标过程$W(s,w)$产生的$\sigma$-域族$\{\mathscr{B}_t\}$，$t\geqslant0$是适应的过程，使得对几乎一切$\omega$

$$u^*(\tau,w(\cdot,\omega))=u(\tau,\omega)\quad\forall\tau\geqslant0$$

因此，对固定的t,x,h，$V(t,x,h)$与Wiener过程$w(t,\omega)$的特殊选择无关。

证 对固定τ，$\mathscr{F}_\tau=\sigma(w(s,\omega),s\leqslant t)$，存在$u_\tau$：

$$u_\tau:C_0[0,\tau]\to R^k$$

u_τ对$\mathscr{B}_\tau$可测，并且$u_\tau(w(\cdot,\omega))=u(\tau,\omega)\quad a.s.$

由假设$u(\cdot)\in\hat{U}_{ad}$，存在自然数N：$0<t_1<t_2<\cdots<t_N<\cdots$，使得

$$u_\tau=u_i,\tau\in[t_{i-1},t_i]\quad(i=1,2,\cdots)$$

令

$$u^*(\tau,w) = u_\tau(w)$$

则 $u^*(\tau,w)$对(τ,w)可测，并且 $u^*:[0,\infty)\times C_0[0,\infty)\to R^k$。这样定义的 u^* 满足引理的要求。 证毕

Wiener 过程的样本轨道是连续的，取 $\Omega=C_0[0,\infty)$，P 是坐标投影过程 $W(t,w)=w(t)$这个 Wiener 过程产生的概率测度，取 $\mathscr{F}_t=\mathscr{B}_t(C_0[0,t])$。

设 $u^*(\cdot,\cdot):[0,\infty)\times C_0[0,\infty)\to U$ 的$\{\mathscr{B}_t\}$，$t\geqslant 0$ 适应的如引理 5.6 所述的阶段过程。约定

$$x^*(t) = \int_0^t g(x^*(\alpha),u^*(\alpha))\mathrm{d}\alpha + \int_0^t \sigma(x^*(\alpha),u^*(\alpha))\mathrm{d}W(\alpha)$$

对 $w_1\in C_0[0,s]$，定义 $u^*_{w_1}:[0,t-s]\times C_0[0,t-s]\to U$

$$u^*_{w_1}(\tau,w_2) = u^*(s+\tau,T^{-1}(w_1,w_2))$$

其中 T^{-1}是映射 T 的逆映射。

显然 $u^*_{w_1}$是 $\mathscr{B}_t$ 所适应的。$u^*_{w_1}$的意思是在 Wiener 轨道直到时间 s 等于 w_1 条件下考虑控制 $u^*_{w_1}$。

令

$$x^*_{w_1}(\tau) = x^*(s,w_1)+\int_0^\tau g(x^*_{w_1}(\alpha),u^*_{w_1}(\alpha))\mathrm{d}\alpha + \int_0^\tau \sigma(x^*_{w_1}(\alpha),u^*_{w_1}(\alpha))\mathrm{d}w_2(\alpha)$$

定义过程

$$\hat{x}(\tau,w) = \begin{cases} x^*(\tau,w_1)，对\ \tau\in[0,s] \\ x^*_{w_1}(\tau-s,w_2)，对\ \tau\geqslant s \end{cases}$$

其中$(w_1,w_2)=Tw$。显然 $x^*(\tau)=\hat{x}(\tau)$，a.s.，$\forall\ t\geqslant 0$。

定理 5.1 对值函数 $V(t,x,h)$成立下面的关系：$\forall\ s\leqslant t$，有

$$V(t,x,h) = V(s,x,V(t-s,\cdot,h)) \tag{5.2.2}$$

证 首先证

$$V(t,x,h)\leqslant V(s,x,V(t-s,\cdot,h))$$

不失一般性，可以假定 $\Omega=C_0[0,\infty)$和 $w(t,\omega)=W(t,w)$。只

要对 $u(\cdot)\in\hat{U}_{ad}$ 证明

$$V(t,x,h,u(\cdot))\leqslant V(s,x,V(t-s,\cdot,h),u(\cdot))$$

就够了。

约定 $x^*,x^*_{w_1},u^*_{w_1}$ 如上所述。为了简单起见，令

$$e(s,t,u^*,w)=\exp\left(-\int_s^t C(x^*(\alpha,w),u^*(\alpha,w))\right)d\alpha$$

$$F(s,t,u^*,w)=\int_s^t f(x^*(\tau,w),u^*(\tau,w))e(s,\tau,u^*,w)d\tau$$

$$J(s,t,u^*,w)=F(s,t,u^*,w)+e(s,t,u^*,w)h(x^*(t))$$

用引理 5.6，可以假定 $u=u^*$，所以

$$V(t,x,h,u^*)=\int J(0,t,u^*,w)d\mu_t(w)$$

$$=\int\{F(0,t,u^*,w)+e(0,t,u^*,w)h(x^*(t))\}d\mu_t(w) \tag{5.2.3}$$

在式(5.2.3)中的被积式的第一项，可表示为

$$F(0,t,u^*,w)=\int_0^t f(x^*(\tau,w),u^*(\tau,w))e(0,\tau,u^*,w)d\tau$$

$$=\int_0^s f(x^*(\tau,w),u^*(\tau,w))e(0,\tau,u^*,w)d\tau$$

$$+\int_s^t f(x^*(\tau,w),u^*(\tau,w))e(0,\tau,u^*,w)d\tau$$

$$=\int_0^s f(x^*(\tau,w),u^*(\tau,w))e(0,\tau,u^*,w)d\tau$$

$$+e(0,s,u^*,w)\int_s^t f(x^*(\tau,w),u^*(\tau,w))e(s,\tau,u^*,w)d\tau$$

$$=F(0,s,u^*,w)+e(0,s,u^*,w)F(s,t,u^*,w) \tag{5.2.4}$$

由式(5.2.3)和式(5.2.4)得

$$V(t,x,h,u^*)=\int\{F(0,s,u^*,w)$$

$$+e(0,s,u^*,w)J(s,t,u^*,w)\}d\mu_t(w)$$

$$=\iint\{F(0,s,u^*,w_1)+e(0,s,u^*,w_1)J(0,t-s,u^*_{w_1},w_2)\}$$

$$\cdot \mathrm{d}\mu_\tau(w_1)\mathrm{d}\mu_{t-s}(w_2)$$

依定义有下式

$$\int J(0,t-s,u_{w_1}^*,w_2)\mathrm{d}\mu_{t-s}(w_2) = V(t-s,x^*(s,w_1),h,u_{w_1}^*)$$

$$\leqslant V(t-s,x^*(s,w_1),h)$$

由式(5.2.3)和上式得

$$V(t,x,h,u^*) \leqslant \int \{F(0,s,u^*,w_1)$$

$$+ e(0,s,u^*,w_1)V(t-s,x^*(s,w_1),h)\}\mathrm{d}\mu_s(w_1)$$

$$= V(s,x,V(t-s,\cdot,h),u^*)$$

其次，要证明相反的不等式

$$V(t,x,h) \geqslant V(s,x,V(t-s,\cdot,h))$$

用引理 5.5，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(t,\varepsilon,h)>0$，使得如果 $|x-y|<\delta$ 时，存在

$$|V(t,x,h,u(\cdot)) - V(t,y,h,u(\cdot))| < \varepsilon \quad \forall\, u(\cdot) \in U_{ad} \tag{5.2.5}$$

因此，只要 $|x-y|<\delta$，就有

$$|V(t,x,h) - V(t,y,h)| < \varepsilon \tag{5.2.6}$$

设 $A_1,A_2,\cdots$，是 R^k 中的 Borel 集，使得 $A_i\cap A_j=\phi(i\neq j)$，集 A_j 的直径 $\mathrm{diam}(A_j)<\delta$ 和 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j=R^k$。

任取 $x_i\in A_i$，存在 $u_i\in \hat{U}_{ad}$，使得

$$V(t-s,x_i,h,u_i) > V(t-s,x_i,h) - \varepsilon \tag{5.2.7}$$

由式(5.2.5)、(5.2.6)和式(5.2.7)，对 $y\in A_i$ 有

$$V(t-s,y,h,u_i) > V(t-s,x_i,h,u_i) - \varepsilon$$

$$\geqslant V(t-s,x_i,h) - 2\varepsilon > V(t-s,y,h) - 3\varepsilon \tag{5.2.8}$$

设 $u_0(\tau,w)$定义在$[0,s]\times C_0[0,s]$上对 σ-域族$\{\mathscr{B}_t\}$，$t\geqslant 0$ 适应的在 U 中取值的过值。定义过程

$$u^*(\tau,w) = \begin{cases} u_0(\tau,w), & 对\ \tau\in[0,s] \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(\tau-s,w_2)\chi_{A_i}(x_0(s,w_1)), & 对\ \tau\geqslant s \end{cases}$$

其中 $Tw=(w_1,w_2)$和 $x_0(\tau,w)$是相应于 $u_0(\tau,w)$的轨道,并且

$$u^*_{w_1}(\alpha,w_2)=\sum_{i=1}^{\infty}u_i(\alpha,w_2)\chi_{A_i}(x_0(s,w_1))$$

用如前面的记号,由式(5.2.8)和式(5.2.3)得

$$\begin{aligned}&\int J(0,t-s,u^*_{w_1},w_2)\mathrm{d}\mu_{t-s}(w_2)\\&=V(t-s,x_0(s,w_1),h,u^*_{w_1})\\&\geqslant V(t-s,x_0(s,w_1),h)-3\varepsilon\end{aligned}\tag{5.2.9}$$

由式(5.2.9)和定义有

$$\begin{aligned}V(t,x,h,u^*)=&\iint\{F(0,s,u^*,w_1)\\&+e(0,s,u^*,w_1)J(0,t-s,u^*_{w_1},w_2)\}\\&\cdot\mathrm{d}\mu_s(w_1)\mathrm{d}\mu_{t-s}(w_2)\\\geqslant&\int\{F(0,s,u^*,w_1)\\&+e(0,s,u^*,w_1)[V(t-s,x_0(s,w_1),h)\\&-3\varepsilon]\}\mathrm{d}\mu_s(w_1)\\=&V(s,x,V(t-s,\cdot,h)-3\varepsilon,u_0)\\\geqslant&V(s,x,V(t-s,\cdot,h),u_0)-3\varepsilon\end{aligned}$$

因此

$$V(t,x,h)\geqslant V(s,x,V(t-s,\cdot,h),u_0)-3\varepsilon$$

由假设 $u_0\in U_{ad}$和 $\varepsilon>0$是任意的,故

$$V(t,x,h)\geqslant V(s,x,V(t-s,\cdot,h))$$ 证毕

如果容许控制类 U^*,使得 $\hat{U}_{ad}\subseteq U^*\subseteq U_{ad}$,则

$$V(t,x,h)=\sup_{u(\cdot)\in U^*}V(t,x,h,u(\cdot))$$

对容许控制类 U^*,定理 5.1 成立。

用§5.1 的记号 $B(R^k)$。在 $B(R^k)$上定义范数

$$\|\varphi\|=\sup_{x\in R^k}|\varphi(x)|,\forall\ \varphi(\cdot)\in B(R^k)$$

则 $B(R^k)$在范数 $\|\cdot\|$之下是一个 Banach 空间。

在 Banach 空间 $B(R^k)$ 上定义非线性算子族：$\{V(t)\}$，$t\geqslant 0$ 如下

$$(V(t)h)(x)=V(t,x,h),\forall\ h(\cdot)\in B(R^k)\qquad(5.2.10)$$

定理 5.2 算子族 $\{V(t)\}$，$t\geqslant 0$ 是 Banach 空间 $B(R^k)$ 上的算子压缩半群：

(1) $V(t+s)=V(t)V(s)$，$\forall\ s,t\geqslant 0$，(半群性质)

$V(0)=I$

(2) $\|V(t)h-h\|\to 0(t\downarrow 0)$，$\forall\ h\in B(R^k)$，(连续性)

(3) $\|V(t)h_1-V(t)h_2\|\leqslant\|h_1-h_2\|\quad\forall\ h_1,h_2\in B(R^k)$，$\forall\ t\geqslant 0$，(压缩性)

(4) 如果 $h_1\leqslant h_2$，即是 $h_1(x)\leqslant h_2(x)\quad\forall\ x\in R^k$，$h_1$，$h_2\in B(R^k)$，则 $V(t)h_1\leqslant V(t)h_2\quad\forall\ t\geqslant 0$

证 用引理 5.5，$\forall\ h\in B(R^k)\Rightarrow\forall\ t\geqslant 0\quad V(t)h\in B(R^k)$，$V(0)=I$。用 §5.1 的引理 5.5 得

$$\|V(t)h-h\|=\|V(t)h-V(0)h\|\to 0\quad(t\downarrow 0)$$

用定理 5.1 得

$$V(t+s)=V(t)V(s)=V(s)V(t)\quad\forall\ t,s\geqslant 0$$

再用引理 5.5 得

$$\|V(t)h-V(s)h\|\to 0\quad(t-s\to 0)$$

因此算子族 $\{V(t)\}$，$t\geqslant 0$ 是强连续的非线性算子半群。

显然，如果 $h_1\leqslant h_2$，$\Rightarrow V(t)h_1\leqslant V(t)h_2\quad\forall\ t\geqslant 0$。从 $V(t,x,h,u(\cdot))$ 的定义，对 $h_1,h_2\in B(R^k)$，有

$$\begin{aligned}&|V(t,x,h_1,u(\cdot))-V(t,x,h_2,u(\cdot))|\\&\leqslant E\exp\left\{-\int_0^t C(x(\tau),u(\tau))d\tau\right\}|h_1(x(t))-h_2(x(t))|\\&\leqslant\|h_1-h_2\|\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}\|V(t)h_1-V(t)h_2\|&=\sup_{x\in R^k}|V(t,x,h_1)-V(t,x,h_2)|\\&\leqslant\|h_1-h_2\|\end{aligned}$$

证毕

用记号 $\partial_i = \partial/\partial x_i$。定义算子 $L(u)$ 如下：

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x,u)\partial_i\partial_j + \sum_{i=1}^{k} g_i(x,u)\partial_i \qquad (5.2.11)$$

其中$\frac{1}{2}\sigma(x,u)\sigma^*(x,u) = a(x,u) = (a_{ij}(x,u))$是 $k\times k$ 矩阵。

令

$$C^2(R^k) = \{h(\cdot) | h \in B(R^k), \partial_i h, \partial_i\partial_j h \in B(R^k),$$
$$i,j = 1,\cdots,k\}$$

定理 5.3 设 A 是算子半群$\{V(t)\}$, $t\geqslant 0$ 的生成算子，则 $C^2(R^k)\subset D(A)$，并且$\forall\ h(\cdot)\in C^2(R^k)$，有

$$(Ah)(x) = \sup_{u\in U}\{L(u)h - C(x,u)h + f(x,u)\} \qquad (5.2.12)$$

其中 $D(A)$表示算子 A 的定义域。

证 为了简单起见，令

$$e(s,u) = \exp\left(-\int_0^s C(x(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)$$

其中 $x(\tau)$是相应于 $u(\cdot)\in U_{ad}$的轨道。

对任意一个 $h(\cdot)\in C^2(R^k)$，用 Itô 公式，得

$$Ee(t,u)h(x(t)) - h(x) = E\int_0^t e(s,u)[L(u(s))h(x(s))$$
$$- C(x(s),u(s))h(x(s))]\mathrm{d}s \qquad (5.2.13)$$

由式(5.2.13)和式(5.1.2)，有

$$V(t,x,h,u(\cdot)) - h(x) = E\int_0^t e(s,u)[f(x(s),u(s))$$
$$+ L(u(s))h(x(s))]\mathrm{d}s$$
$$- E\int_0^t e(s,u)C(x(s),u(s))h(x(s))\mathrm{d}s \qquad (5.2.14)$$

用假定(A_2)和命题 5.1，得

$$\left| E\int_0^t e(s,u(\cdot))[f(x(s),u(s)) + L(u(s))h(x(s))\right.$$

$$- \{f(x,u(s)) + L(u(s))h(x)\}]ds|$$

$$\leqslant c_1 E\int_0^t |x(s) - x|ds + c_2 \sum_{i,j=1}^k E\int_0^t |h_{x_i x_j}(x(s))$$

$$- h_{x_i x_j}(x)|ds + c_3 \sum_{i,j=1}^k E\int_0^t |h_{x_i}(x(s)) - h_{x_i}(x)|ds$$

(5.2.15)

这里 c_1, c_2 和 c_3 是不依赖于 x, t 和 u 的正常数。

用命题 5.1，当 $t\leqslant 1$ 时，有

$$E\int_0^t |x(s) - x|ds \leqslant E\int_0^t |x(s) - x|^2 ds \leqslant c_4(t^2 + t^3)$$

(5.2.16)

对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $|x-y|<\delta$ 时，有

$$\sum_{i,j=1}^k |h_{x_i x_j}(x) - h_{x_i x_j}(y)| < \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^k |h_{x_i}(x) - h_{x_i}(y)| < \varepsilon$$

约定

$$e = \{(s,\omega)|(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega, |x(s,\omega) - x| > \delta\}$$

则

$$\sum_{i,j=1}^k E\int_0^t |h_{x_i x_j}(x(s)) - h_{x_i x_j}(x)|ds$$

$$= \sum_{i,j=1}^k E\int_e |h_{x_i x_j}(x(s)) - h_{x_i x_j}(x)|ds$$

$$+ \sum_{i,j=1}^k E\int_{e^c} |h_{x_i x_j}(x(s)) - h_{x_i x_j}(x)|ds$$

$$\leqslant c_5 \delta^{-2} E\int_0^t |x(s) - x|^2 ds + c_6 \varepsilon t$$

$$\leqslant c_7(t^3 + t^2 + \varepsilon t) \qquad (5.2.17)$$

其中 e^c 是集 e 的补集。

对于式(5.2.15)的右端的第三项可作类似的估计。由式(5.2.

14)、式(5.2.15)和式(5.2.17)得

$$t^{-1}\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}}\left|V(t,x,h,u(\cdot))-h(x)-E\int_0^t e(s,u(\cdot))[f(x,u(s))\right.$$
$$\left.+L(u(s))h(x)-C(x,u(s))h(x)]\mathrm{d}s\right|\to 0\quad(t\downarrow 0)\qquad(5.2.18)$$

其次,有下面的关系式

$$\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}}E\int_0^t\{L(u(s))h(x)-C(x,u(s))h(x)+f(x,u(s))\}\mathrm{d}s$$
$$\leqslant\int_0^t\sup_{u\in U}\{L(u)h(x)-C(x,u)h(x)+f(x,u)\}\mathrm{d}s$$
$$=t\sup_{u\in U}\{L(u)h(x)-C(x,u)h(x)+f(x,u)\}$$

对任给 $\varepsilon>0$ 足够小,存在 $u_\varepsilon\in U$,使得上式右端

$$<t\{L(u_\varepsilon)h(x)-C(x,u_\varepsilon)h(x)+f(x,u_\varepsilon)\}+\varepsilon$$
$$\leqslant\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}}E\int_0^t\{L(u(s))h(x)-C(x,u(s))h(x)$$
$$+f(x,u(s))\}\mathrm{d}s+\varepsilon$$

由上式左、右两端相等得

$$\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}}E\int_0^t\{L(u(s))h(x)-C(x,u(s))h(x)+f(x,u(s))\}\mathrm{d}s$$
$$=t\sup_{u\in U}\{L(u)h(x)-C(x,u)h(x)+f(x,u)\}\qquad(5.2.19)$$

由 $e(s,u(\cdot))$ 的定义,有下式

$$E\int_0^t(1-e(s,u(\cdot)))\mathrm{d}s\leqslant E\int_0^t\int_0^s C(x(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s$$
$$\leqslant\frac{b}{2}t^2\qquad(5.2.20)$$

由式(5.2.18)、式(5.2.19)和式(5.2.20)得

$$t^{-1}\{V(t,x,h)-V(0,x,h)\}=t^{-1}\{V(t,x,h)-h(x)\}$$
$$=\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}}\{V(t,x,h,u(\cdot))-h(x)\}t^{-1}$$
$$=\sup_{u\in U}\{L(u)h(x)-C(x,u)h(x)+f(x,u)\}+o(1)$$
$$(5.2.21)$$

依算子半群的生成算子的定义和式(5.2.21),得

$$(Ah)(x)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{V(t)h-h}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{V(t,x,h)-h(x)}{t}$$

$$=\sup_{u\in U}\{L(u)h(x)-C(x,u)h(x)+f(x,u)\}$$ 证毕

推论 5.1 设$\forall\ t>0, V(t,\cdot,h)\in C^2(R^k)$,则$V(t,x,h)$是下面的 HJB 偏微分方程

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}=\sup_{u\in U}\{L(u)V(t,x)-C(x,u)V(t,x)+f(x,u)\} \tag{5.2.22}$$

$$V(0,x)=h(x)\quad x\in R^k$$

的解。偏微分方程(5.2.22)简写为 HJB 偏微分方程。

用 $u\in U$ 表示常值控制 $u(t,\omega)=u, x^u(t)$表示相应于常值控制 u 的轨道。定义算子 $T^u(t)$如下:$\forall\ h\in B(R^k)$,有

$$T^u(t)h(x)=V(t,x,h,u)\quad t\geqslant 0$$

则$\{T^u(t)\}, t\geqslant 0$ 是 Banach 空间 $B(R^k)$上的非线性、强连续的压缩单调算子半群。

定义 5.1 对 $u\in U$, $\{\hat{Q}(t)\}, \{\hat{T}^u(t)\}, t\geqslant 0$ 都是 $B(R^k)$上的算子半群,$\{\hat{Q}(t)\}, t\geqslant 0$ 称为$\{\hat{T}^u(t)\}, t\geqslant 0$ 的包络,是指:

(1)$\hat{T}^u(t)h\leqslant\hat{Q}(t)h\quad\forall\ h\in B(R^k), t\geqslant 0, u\in U$

(2)$\{\hat{Q}(t)\}t\geqslant 0$ 具有最小性质。即是,如果$\{\Lambda(t)\}, t\geqslant 0$ 是 $B(R^k)$上满足(1)的算子半群,则

$$\hat{Q}(t)h\leqslant\Lambda(t)h\quad\forall\ h\in B(R^k), t\geqslant 0$$

定理 5.3 用式(5.2.10)定义的算子半群$\{V(t)\}\quad t\geqslant 0$ 是算子半群$\{T^u(t)\}\quad t\geqslant 0, (u\in U)$的包络。

证 用定义 5.1 有

$$T^u(t)h=V(t,x,h,u)\leqslant\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}}V(t,x,h,u(\cdot))$$

$$=V(t,x,h)=V(t)h\quad\forall\ h\in B(R^k)$$

故定义 5.1 之(1)成立。

设$\{A(t)\}t\geqslant 0$是满足(1)的算子半群。N 表示自然数，令 $\Delta=2^{-N}$。用

$$Jh=\sup_{u\in U}T^{u}(\Delta)h$$

定义算子 $J=J(N)$。于是 $J:B(R^{k})\to B(R^{k})$。因此可以逐次定义 J^{k}，则有

(1) $J^{k}h\leqslant A(k\Delta)h$

事实上，对 $k=1$，(1)显然成立。假定对自然数 k，有

$$J^{k}h\leqslant A(k\Delta)h$$

成立。则

$$J^{k+1}h=J(J^{k}h)\leqslant J(A(k\Delta)h)\leqslant A(\Delta)A(k\Delta)h$$
$$=A(k\Delta+\Delta)h=A((k+1)\Delta)h$$

所以对任意自然数 k，(1)成立。

(2) $\sup\limits_{u(\cdot)\in U_N}V(k\Delta,x,h,u(\cdot))\leqslant J^{k}h(x)$

其中

$$U_N=\{u(t)\mid u(t)=u_i\in U,i2^{-N}\leqslant t<(i+1)2^{-N},i=1,2,\cdots\}$$

由于 $u(0)=u\in U$，有下式

$$\sup_{u(\cdot)\in U_N}V(\Delta,x,h,u(\cdot))=\sup_{u\in U}V(\Delta,x,h,u)=(Jh)(x)$$

现在假定(2)对自然数 k 成立。让 $u(\cdot)\in U_N$。用动态规划原理定理 5.1，有

$$V((k+1)\Delta,x,h,u(\cdot))\leqslant V(\Delta,x,V(k\Delta,\cdot,h),u(\cdot))$$
$$=E\left\{\int_0^{\Delta}e(s,u)f(x(s),u)\mathrm{d}s+e(\Delta,u)V(k\Delta,x(\Delta),h,u(\cdot))\right\}$$
$$\leqslant E\left\{\int_0^{\Delta}e(s,u)f(x(s),u)\mathrm{d}s+e(\Delta,u)J^{k}h(x(\Delta))\right\}$$
$$=V(\Delta,x,J^{k}h,u(\cdot))\leqslant J(J^{k}h)=J^{k+1}h(x)$$

所以，式(2)对任意自然数 k 成立。

由性质(1)和(2)，得

$$\sup_{u(\cdot)\in U_N}V(t,x,h,u(\cdot))\leqslant A(t)h\qquad 对\ t=k2^{-N}$$

令 $N\to\infty$，用引理 5.4，得

$$V(t,x,h)=(V(t)h)(x)=\sup_{u(\cdot)\in U_N} V(t,x,h,u(\cdot))$$
$$\leqslant \Lambda(t)h(x)，对 t 是 2 进位数成立。$$

由于 $V(t)$ 和 $\Lambda(t)$ 对 t 连续，所以上式对 $\forall\ t\geqslant 0$ 成立。　　证毕

§ 5.3　Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程的广义解

本节为了讨论 HJB 偏微分方程的广义解，需要一些更强的条件。

如果 $f, f_{x_i}, f_{x_ix_j}\in B(R^k)$ 和存在正常数 c_1,α 使得

$$|f_{x_ix_j}(x)-f_{x_ix_j}(y)|\leqslant c_1|x-y|^{\alpha}$$
$$\forall\ x,y\in R^k,(i,j=1,2,\cdots,k) \tag{5.3.1}$$

称 $f\in B^{2-\alpha}$

在本节还需要关于随机控制问题(5.1.1)—(5.1.2)的系数的光滑性条件：

$$|F(x_1,u_1)-F(x_2,u_2)|\leqslant \beta|x_1-x_2|+\rho(|u_1-u_2|) \tag{5.3.2}$$

$$|F(x,u)|\leqslant b$$

上两式对 $\forall\ u_1,u_2,u\in U$，$x_1,x_2\in R^k$ 成立，其中 $F=G,G_{x_i},G_{x_ix_j}$，$G=\sigma,g,f,C$，β 是与 x,u 无关的正常数，$\rho(\cdot)$ 是一个连续的增函数，$\rho(0)=0$ 和 $G_{x_ix_j}$ 满足式(5.3.1)。

在上述假定下，用随机微分方程(5.1.1)的解对初始值 x 的可微性结果，可以证明下面的引理。

引理 5.7　$\forall\ u(\cdot)\in U_{ad}$，存在与 x 和 $u(\cdot)$ 无关的正常数 c_2，使得

$$|V(t,x,h,u(\cdot))-V(s,x,h,u(\cdot))|\leqslant c_2|t-s|$$

并且 $V(t,\cdot,h,u(\cdot))\in C^2(R^k)$，$V_{x_i}(t,\cdot,h,u(\cdot))$ 与 $V_{x_ix_j}(t,\cdot,h,u(\cdot))$ 的界和连续性与 $u(\cdot)$ 无关。

现在假定存在与$(x,u)\in R^k\times U$无关的正常数ν，使得

$$\sum_{i,j=1}^{k}\sigma_{ij}(x,u)\theta_i\theta_j\geqslant\nu|\theta|^2\quad\forall\,\theta\in R^k,\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

(5.3.3)

设$T>0$，$\xi(t)$是$\sigma=(\sigma_{ij})$时，满足条件(5.3.3)的相应于常值控制$u\in U$的随机微分方程(5.1.1)满足初始条件$\xi(s)=x$的解。$\xi(t)$是一个马尔可夫扩散过程，对任一有界的Borel函数h和任意的$\lambda>0$，定义算子R_λ如下：

$$R_\lambda h(s,x)=E_{s,x}\int_s^T e^{-\lambda(t-s)}e^{-\int_s^t C(\xi(\tau),u)d\tau}h(t,\xi(t))dt\quad(5.3.4)$$

这里$E_{s,x}$的下标(s,x)表示随机微分方程(5.1.1)的解$\xi(t)$满足初始条件$\xi(s)=x$。

对常值控制u所对应的具有初始条件$\xi(s)=x$的方程(5.1.1)的解$\xi(t)$，是齐次的马尔可夫扩散过程。于是有

$$R_\lambda h(s,x)=E_{0,x}\int_0^{T-s}e^{-\lambda t}e^{-\int_0^t C(\xi(\tau),u)d\tau}h(t+s,\xi(t))dt$$

(5.3.5)

引理 5.8 算子R_λ满足豫解方程

$$R_\mu-R_\lambda=(\lambda-\mu)R_\mu R_\lambda\quad\forall\,\lambda,u>0\qquad(5.3.6)$$

证 记

$$e(s,t,u)=\exp\left(-\int_s^t C(\xi(\tau),\tau)d\tau\right)$$

用算子R_λ的定义和$\xi(t)$的马氏性质，有

$$R_\mu(R_\lambda g)(s,x)=E_{s,x}\int_s^T e^{-\mu(t-s)}e(s,t,u)R_\lambda g(t,\xi(t))dt$$

$$=E_{s,x}\int_s^T e^{-\mu(t-s)}e(s,t,u)\left\{E_{t,\xi(t)}\int_t^T e^{-\lambda(\alpha-t)}e(t,\alpha,u)g(\alpha,\xi(\alpha))d\alpha\right\}dt$$

$$=E_{s,x}\int_s^T e^{-\mu(t-s)}e(s,t,u)\int_t^T e^{-\lambda(\alpha-t)}e(t,\alpha,u)g(\alpha,\xi(\alpha))d\alpha dt$$

$$=E_{s,x}\int_s^T\left(\int_s^\alpha e^{-\mu(t-s)-\lambda(\alpha-t)}dt\right)e(s,\alpha,u)g(\alpha,\xi(\alpha))d\alpha$$

$$= \frac{1}{\lambda - \mu}\left\{E_{s,x}\int_s^T e^{-\mu(\alpha - s)}e(s,\alpha,u)g(\alpha,\xi(\alpha))\mathrm{d}\alpha\right.$$

$$\left. - E_{s,x}\int_s^T e^{-\lambda(\alpha - s)}e(s,\alpha,u)g(\alpha,\xi(\alpha))\mathrm{d}\alpha\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda - \mu}\{R_\mu g(s,x) - R_\lambda g(s,x)\}$$ 证毕

引理 5.9 令 $\hat{V}(s,x) = V(T-s)h(x)$。则存在正常数 M，使得

$$|\lambda R_\lambda \hat{V}(s,x) - (1 - e^{-\lambda(T-s)})\hat{V}(s,x)| \leqslant M/\lambda$$

$$\forall \lambda > 0, x \in R^+, s \in [0,T] \tag{5.3.7}$$

证 首先证存在一个与 λ, x, s 无关的常数 M_1，使得

$$\lambda R_\lambda \hat{V}(s,x) - (1 - e^{-\lambda(T-s)})\hat{V}(s,x) \geqslant M_1\lambda^{-1} \tag{5.3.8}$$

依 R_λ 与 $\hat{V}(s,x)$ 的定义可得

$$\lambda R_\lambda \hat{V}(s,x) - (1 - e^{-\lambda(T-s)})\hat{V}(s,x)$$

$$= E_{s,x}\int_s^T \lambda e^{-\lambda(t-s)}e(s,t,u)\hat{V}(t,\xi(t))\mathrm{d}t - (1 - e^{-\lambda(T-s)})\hat{V}(s,x)$$

$$= E_{s,x}\int_s^T \lambda e^{-\lambda(t-s)}e(s,t,u)\{\hat{V}(t,\xi(t)) - \hat{V}(s,\xi(t))\}\mathrm{d}t$$

$$+ E_{s,x}\int_s^T \lambda e^{-\lambda(t-s)}e(s,t,u)\hat{V}(s,\xi(t))\mathrm{d}t$$

$$- (1 - e^{-\lambda(T-s)})\hat{V}(s,x) \tag{5.3.9}$$

用引理 5.7，有

$$|\hat{V}(t,\xi(t)) - \hat{V}(s,\xi(t))| \leqslant \overline{M}|t - s|$$

由此式得到式(5.3.9)右端第一项的估计为

$$E_{s,x}\int_s^T \lambda e^{-\lambda(t-s)}e(s,t,u)\{\hat{V}(t,\xi(t)) - \hat{V}(s,\xi(t))\}\mathrm{d}t$$

$$\geqslant -\overline{M}\lambda^{-1} \quad \forall \lambda, x, s \tag{5.3.10}$$

其次，式(5.3.9)右端的第二、三项有下面的估计

$$E_{s,x}\int_s^T \lambda e^{-\lambda(t-s)}e(s,t,u)\hat{V}(s,\xi(t))\mathrm{d}t - (1 - e^{-\lambda(T-s)})\hat{V}(s,x)$$

$$= E_{s,x}\int_s^T \lambda e^{-\lambda(t-s)} e(s,t,u) \sup_{u(\cdot)\in U_{ad}} V(T-s,\xi(t),h,u(\cdot))\mathrm{d}t$$

$$-(1-e^{-\lambda(T-s)}) \sup_{u(\cdot)\in U_{ad}} V(T-s,x,h,u(\cdot))$$

$$\geqslant \inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} E_{s,x}\int_s^T \lambda e^{-\lambda(t-s)}\{e(s,t,u)V(T-s,\xi(t),h,u(\cdot))$$

$$-V(T-s,x,h,u(\cdot))\}\mathrm{d}t$$

用引理 5.7，$V(T-s,\cdot,h,u(\cdot))\in C^2(R^k)$，对函数 $e(s,t,u)\times V(T-s,\xi(t),h,u)-V(T-s,x,h,u)$ 用 Itô 公式，然后用引理 5.7 和计算可得

$$E_{s,x}\int_s^T \lambda e^{-\lambda(t-s)} e(s,t,u)\hat{V}(s,\xi(t))\mathrm{d}t$$

$$-(1-e^{-\lambda(T-s)})\hat{V}(s,x)$$

$$\geqslant M_1\lambda^{-1} \qquad (5.3.11)$$

其中 M_1 是一个与 λ,x,s 无关的常数。

现在证明存在正常数 M_2，使得

$$\lambda R_\lambda \hat{V}(s,x)-(1-e^{-\lambda(T-s)})\hat{V}(s,x)\leqslant M_2\lambda^{-1}$$

(5.3.12)

用定理 5.1，得

$$\hat{V}(s,x)=V(T-s,x,h)=V(\tau,x,V(T-s-\tau,\cdot,h))$$

$$\geqslant V(\tau,x,V(T-s-\tau,\cdot,h),u)$$

$$=E_{0,x}\int_0^\tau e(0,\alpha,u)f(\xi(\alpha),u)\mathrm{d}\alpha$$

$$+e(0,\tau,u)\hat{V}(s+\tau,\xi(\tau)) \qquad (5.3.13)$$

用 $\lambda e^{-\lambda\tau}$ 乘式(5.3.13)的右端，然后对 τ 从 0 到 $T-s$ 积分，用 $\xi(t)$ 是齐次的马尔可夫过程的性质，可得

$$E_{0,x}\left\{\int_0^{T-s}\lambda e^{-\lambda\tau}\int_0^\tau e(0,\alpha,u)f(\xi(\alpha),u)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\tau\right.$$

$$\left.+\int_0^{T-s}\lambda e^{-\lambda\tau}e(0,\tau,u)\hat{V}(s+\tau,\xi(\tau))\mathrm{d}\tau\right\}$$

$$=E_{s,x}\left\{\int_s^T\lambda e^{-\lambda(\tau-s)}\int_s^\tau e(s,\alpha,u)f(\xi(\alpha),u)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\tau\right.$$

$$+\int_s^T \lambda e^{-\lambda(\tau-s)} e(s,\tau,u)\hat{V}(\tau,\xi(\tau))d\tau\Big\}$$

$$=E_{s,x}\Big\{\int_s^T \lambda e^{-\lambda(\tau-s)}\int_s^\tau e(s,\alpha,u)f(\xi(\alpha),u)d\alpha d\tau\Big\}+\lambda R_\lambda \hat{V}(s,x)$$

(5.3.14)

由式(5.3.13)和式(5.3.14),如同对式(5.3.10)和式(5.3.11)的推导一样,可得

$$0=\int_s^{T-s}\lambda e^{-\lambda t}\hat{V}(s,\tau)d\tau-(1-e^{-\lambda(T-s)})\hat{V}(s,x)$$

$$\geqslant \lambda R_\lambda \hat{V}(s,x)-(1-e^{-\lambda(T-s)})\hat{V}(s,x)-M_2\lambda^{-1}$$ 证毕

引理 5.10 设 $d>0$, $S=S(0,d)=\{x\,|\,x\in R^k,|x|<d\}$, τ 是随机过程 $\xi(t)$ 击中球 S 的边界 ∂S 的时间。则存在定义在 $[0,T]\times S$ 上的 Borel 有界函数 $\hat{h}$,使得

$$-W(s,x)=E_{s,x}\Big\{\int_s^{T\wedge\tau} e(s,t,u)\hat{h}(t,\xi(t))dt$$

$$-e(s,t\wedge T,u)W(T\wedge\tau,\xi(T\wedge\tau))\Big\}$$

(5.3.15)

其中

$$W(s,x)=\hat{V}(s,x)-E_{s,x}e(s,T,u)h(\xi(T))$$

证 定义函数 $\hat{h}_\lambda(s,x)$ 如下:

$$\hat{h}_\lambda(s,x)=\lambda\{\lambda R_\lambda \hat{V}(s,x)-(1-e^{-\lambda(T-s)})\hat{V}(s,x)\}$$

依据引理 5.9,得

$$|\hat{h}_\lambda(s,x)|\leqslant M_1,\forall s\leqslant T,x\in S,\lambda\geqslant 0 \qquad (5.3.16)$$

因此,函数集 $\{\hat{h}_\lambda;\lambda\geqslant 0\}$ 是 $L^p((0,T)\times S)(p>1)$ 中的弱紧集。设 $\hat{h}\in L^p((0,T)\times S)$ 使得有子列 $\hat{h}_{\lambda_i}$ 成立

$$\hat{h}=\lim_{\lambda_i\to\infty}\hat{h}_{\lambda_i} \text{ 在 } L^p((0,T)\times S) \text{ 中弱收敛。} \qquad (5.3.17)$$

依 Mazur 定理,$\forall n$,存在 $\mu_i^{(n)}\geqslant 0$, $\mu_n^{(n)}+\cdots+\mu_{N_n}^{(N_n)}=1$,使得

$$\hat{h}_n=\sum_{i=n}^{N_n}\mu_i^{(n)}\hat{h}_{\lambda_i}\to\hat{h}(n\to\infty) \text{ 在 } L^p((0,T)\times S) \text{ 中强收敛。}$$

(5.3.18)

因此存在函数列$\{\hat{h}_n\}_1^\infty$的子列(仍用$\{\hat{h}_n\}_1^\infty$表示)在$[0,T]\times S$上收敛于$\hat{h}$。于是$\hat{h}(t,x)$在$[0,T]\times S$上几乎处处有界。

依前所述,$\xi(t)$是一个强马尔可夫过程,于是有

$$
\begin{aligned}
R_0\hat{h}_{\lambda_i}(s,x) &= E_{s,x}\int_s^T e(s,t,u)\hat{h}_{\lambda_i}(t,\xi(t))\mathrm{d}t \\
&= E_{s,x}\int_s^{T\wedge\tau} e(s,t,u)\hat{h}_{\lambda_i}(t,\xi(t))\mathrm{d}t \\
&\quad + e(s,T\wedge t,u)R_0\hat{h}_{\lambda_i}(T\wedge\tau,\xi(T\wedge\tau))
\end{aligned}
\tag{5.3.19}
$$

由式(5.3.19)和式(5.3.18)得

$$
\begin{aligned}
R_0\hat{h}_n(s,x) &= E_{s,x}\int_s^{T\wedge\tau} e(s,t,u)\hat{h}_n(t,\xi(t))\mathrm{d}t \\
&\quad + e(s,T\wedge t,u)R_0\hat{h}_n(T\wedge t,\xi(T\wedge\tau))
\end{aligned}
\tag{5.3.20}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
&\left|E_{s,x}\int_s^{T\wedge\tau} e(s,t,u)\{\hat{h}_n(t,\xi(t))-\hat{h}(t,\xi(t))\}\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant c\|\hat{h}_n-\hat{h}\|_p\to 0\quad(n\to\infty)
\end{aligned}
\tag{5.3.21}
$$

其中$\|\cdot\|_p$表示空间$L^p((0,T)\times S)$上的范数。

现在要证

$$
R_0\hat{h}_\lambda(s,x)\to -\hat{V}(s,x)+E_{s,x}e(s,T,u)h(\xi(T))\ (\lambda\to\infty)
\tag{5.3.22}
$$

用引理5.8,有下式

$$
\begin{aligned}
R_0\hat{h}_\lambda(s,x) &= \lambda\{\lambda R_0R_\lambda\hat{V}(s,x)-R_0\hat{V}(s,x)\} \\
&\quad + E_{s,x}\int_s^T e^{-\lambda(T-t)}e(s,t,u)\hat{V}(t,\xi(t))\mathrm{d}t \\
&= -\lambda R_\lambda\hat{V}(s,x)+E_{s,x}\int_s^T\lambda e^{-\lambda(T-t)}e(s,t,u)\hat{V}(t,\xi(t))\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{5.3.23}
$$

用引理5.7,可对函数$f(t,x)=e^{-\lambda(T-t)}e(s,t,u)\hat{V}(t,x)$,用Itô

公式,然后令 $\lambda\to\infty$,得

$$E_{s,x}\int_s^T \lambda e^{-\lambda(T-t)}e(s,t,u)\hat{V}(t,\xi(t))dt\to E_{s,x}e(s,T,u)\hat{V}(T,\xi(T))=E_{s,x}e(s,T,u)h(\xi(T))\triangleq\psi(s,x)$$

注意到 $\psi(s,x)$ 是下面的偏微分方程

$$\psi_s+L(u)\psi=0,\text{在}[0,T]\times R^k \tag{5.3.24}$$

$$\psi(T,x)=h(x),x\in R^k$$

的唯一解。用引理5.9,$\lambda R_\lambda\hat{V}\to\hat{V}(\lambda\to\infty)$ 在区域 $[0,T]\times R^k$ 上一致地。这就证明了(5.3.22)。

函数 $R_0\hat{h}_\lambda$ 有界,$|R_0\hat{h}_\lambda|\leqslant M_3,\forall\lambda,s,x$。因此,$R_0\hat{h}_n$ 也有界。

$$|R_0\hat{h}_n(s,x)|\leqslant M_3\quad\forall n,s,x$$

于是

$$R_0\hat{h}_n(s,x)\to-\hat{V}(s,x)+\psi(s,x)\quad\forall s,x \tag{5.3.25}$$

在式(5.3.20)中,令 $n\to\infty$,用式(5.3.21)、(5.3.22)和式(5.3.25)得

$$-\hat{V}(s,x)+\psi(s,x)=E_{s,x}\int_s^{T\wedge\tau}e(s,t,u)\hat{h}(t,\xi(t))\mathrm{d}t$$
$$+e(s,T\wedge\tau,u)\{-\hat{V}(T\wedge\tau,\xi(T\wedge\tau))$$
$$+\psi(T\wedge\tau,\xi(T\wedge\tau))\}$$

证毕

定理5.4 如果存在 $u\in U$,使得 $\sigma(\cdot,u)$ 是一致正定,即是对某个 $\nu>0$,使得

$$\inf_{x\in R^k}\sum_{i,j=1}^k\sigma_{ij}(x,u)\theta_i\theta_j\geqslant\nu|\theta|^2\quad\forall\theta\in R^k \tag{5.3.26}$$

则 $V(t)h(x)\in W^{1,2}_{p,\mathrm{loc}}$,对大的 p。这里 $W^{1,2}_{p,\mathrm{loc}}$ 是 Sobolev 空间。

证 设 $\hat{h}(s,x)$ 在 $[0,T]\times S$ 上是有界的 Borel 函数。考虑边值问题

$$H_s(s,x)+L(u)H(s,x)-C(x,u)H(s,x)=\hat{h}(s,x)$$
$$H(s,x)=W(s,x),(s,x)\in[0,T]\times\partial S\cup\{T\}\times S \tag{5.3.27}$$

用偏微分方程的理论,边值问题(5.3.27)存在唯一解 $H(\cdot,$

$\cdot) \in W^{1,2}_{p,\mathrm{loc}}([0,T]\times\bar{S})$。并且 $H(s,x)$ 在 $[0,T]\times\bar{S}$ 上连续。对函数 $e(s,t,u)H(t,x)$ 用 Itô 公式直到时刻 $T\Lambda\tau$ 得

$$-H(s,x)=E_{s,x}\left\{\int_s^{T\wedge\tau}e(s,t,u)\hat{h}(t,\xi(t))\mathrm{d}t\right.$$

$$\left.-e(s,T\wedge t,u)H(T\wedge\tau,\xi(T\wedge\tau))\right\}$$

用引理 5.10，有 $H=W=\hat{V}-\psi\Rightarrow W\in W^{1,2}_{p,\mathrm{loc}}$。因为 ψ 是方程(5.3.24)的唯一解，$\psi_t,\psi_{x_i},\psi_{x_ix_j}$ 是有界连续的，因此 $\hat{V}\in W^{1,2}_{p,\mathrm{loc}}$。　　证毕

定理 5.5　假定存在正常数 ν，使得

$$\sum_{i,j=1}^{k}\sigma_{i,j}(x,u)\theta_i\theta_j\geqslant\nu|\theta|^2\quad\forall\ \theta,x\in R^k,u\in U$$

(5.3.28)

则 $V(t)h(x)=V(t,x,h)\in W^{1,2}_{p,\mathrm{loc}}$ 对大的 p，并且满足下面的偏微分方程

$$\frac{\partial V(t,x,h)}{\partial t}=\sup_{u\in U}\{L(u)V(t,x,h)-C(x,u)V(t,x,h)$$

$$+f(x,u)\}\text{在 }R^1_+\times R^k\text{ 上}\qquad(5.3.29)$$

$$V(0,x,h)=h(x)\quad x\in R^k$$

证　依定理 5.4，$V(t,x,h)\in W^{1,2}_{p,\mathrm{loc}}$。令

$$\hat{V}(s,x)=V(T-s)h(x)$$

$$G(s,x,u)=f(x,u)+\left(\frac{\partial}{\partial s}+L(u)\right)\hat{V}(s,x)-C(x,u)\hat{V}(s,x)$$

对每一 u，$G(s,x,u)$ 在 $[0,T]\times R^k$ 上有界。

用 $\xi(t)$ 表示相应于控制 $u\in U$ 的轨道，由式(5.3.13)和用 Itô 公式有下式

$$0\geqslant E_x\left\{\int_0^s e(0,\tau,u)f(\xi(\tau),u)\mathrm{d}\tau+e(0,s,u)\hat{V}(t+s,\xi(s))\right\}$$

$$-\hat{V}(t,x)=E_x\int_0^s e(0,\tau,u)G(t+\tau,\xi(\tau),u)\mathrm{d}\tau$$

因此得

$$0\geqslant E_x\int_0^{T-t}\alpha^2e^{-\alpha s}\int_0^s e(0,\tau,u)G(t+\tau,\xi(\tau),u)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s$$

$$= E_x\int_0^{T-t}\alpha^2 e(0,\tau,u)G(t+\tau,\xi(\tau),u)\int_\tau^{T-t}e^{-\alpha s}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\tau$$

$$= E_x\left\{\int_0^{T-t}\alpha e^{-\alpha\tau}e(0,\tau,u)G(t+\tau,\xi(\tau),u)\mathrm{d}\tau\right.$$

$$\left.-\alpha e^{-\alpha(T-t)}\int_0^{T-t}e(0,\tau,u)G(t+\tau,\xi(\tau),u)\mathrm{d}\tau\right\} \qquad (5.3.30)$$

上式右端的第二项的估计

$$\left|\alpha e^{-\alpha(T-t)}\int_0^{T-t}e(0,\tau,u)G(t+\tau,\xi(\tau),u)\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \alpha b_u(T-t)e^{-\alpha(T-t)}$$

其中

$$|G(\cdot,\cdot,u)| \leqslant b_u$$

由此得

$$\int_{S_d}\int_0^T\left|E_x(\alpha e^{-\alpha(T-t)}\int_0^{T-t}e(0,\tau,u)G(t+\tau,\xi(\tau),u)\mathrm{d}\tau\right|^p$$

$$\times\mathrm{d}t\mathrm{d}x\to 0 \quad (\alpha\to\infty) \qquad (5.3.31)$$

对任何紧集 $D\subset R^k$ 和 $\varepsilon>0$，存在 $d>0$，使得 $\forall\ x\in D$，过程 $\xi_x(t)$ 击中 ∂S_d 的时间 τ 有 $P_x(\tau<T)<\varepsilon$。因此得

$$\left|E_x\int_{(T-t)\wedge\tau}^{T-t}\alpha e^{-\alpha\tau}e(0,\tau,u)G(t+\tau,\xi(\tau),u)\mathrm{d}\tau\right|<b_u\varepsilon$$

$$\forall\ t\leqslant T, x\in D \qquad (5.3.32)$$

当 $\alpha\to\infty$ 时，有

$E_x\int_0^{(T-t)\wedge\tau}\alpha e^{-\alpha\tau}e(0,\tau,u)G(t+\tau,\xi(\tau),u)\mathrm{d}\tau\to G(t,x,u)$，在 $L^p((0,T)\times R^k)$ 中收敛。 (5.3.33)

由式(5.3.30)和式(5.3.33)，当 $\varepsilon\to 0$ 时得

$$G(t,x,u)\leqslant 0, a.e. (t,x)\in[0,T]\times R^k$$

约定

$$M(t,x)=\sup_{u\in U}G(t,x,u)$$

函数 $G(t,x,u)$ 关于 u 连续，$M(t,x)\leqslant 0, a.e.$，并且函数 M 有界。

用定理 5.1 和 Itô 公式，得

$$0= \sup_{u(\cdot)\in U_{ad}} E_x\int_0^\tau e(0,\tau,u(\cdot))G(t+\tau,x(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant \sup_{u(\cdot)\in U_{ad}} E_x\int_0^\tau e(0,\tau,u(\cdot))M(t+\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant \sup_{u(\cdot)\in U_{ad}} E_x\int_0^{\tau\wedge\varepsilon} e^{-\alpha\beta}e(0,\beta,u(\cdot))M(t+\beta,x(\beta))\mathrm{d}\beta$$

$$\leqslant 0,\forall\ \alpha\geqslant 0$$

其中用了不等式 $M\leqslant e^{-\alpha\beta}M\leqslant 0$。$\tau$ 是过程 $x(t)$击中 ∂S_k 的时间。因此

$$\sup_{u(\cdot)\in U_{ad}} E_x\int_0^{(T-t)\wedge\varepsilon} \alpha e^{-\alpha\beta}e(0,\beta,u(\cdot))M(t+\beta,x(\beta))\mathrm{d}\beta=0$$

但是

$$E_x\int_0^{(T-t)\wedge\varepsilon} \alpha e^{-\alpha\beta}e(0,\beta,u(\cdot))M(t+\beta,x(\beta))\mathrm{d}\beta\to M(t,x)\ (\alpha\to$$

∞)，在 $L^p((0,T)\times R^k)$中收敛。

故 $M(t,x)=0\quad a.e.(t,x)$。 证毕

§5.4 Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程的粘性解

设 G 是 k 维欧氏空间 R^k 中的一个具有光滑边界 ∂G 的区域（可能 $G=R^k$）。$C(G)$表示在区域 G 上实值连续函数的全体。对 $h(\cdot)\in C(G)$，定义集 $D^+h(x)$如下

$$D^+h(x)=\Big\{(p,Q)\,|\,(p,Q)\in R^k\times S(k),\overline{\lim_{y\to x}}\Big\{h(y)-h(x)-(p,y-x)-\frac{1}{2}(Q(x-y),(x-y))\Big\}\leqslant 0\Big\}\tag{5.4.1}$$

其中$(\cdot,\cdot)$表示 R^k 上的内积，$S(k)$表示 $k\times k$ 对称矩阵的全体的集。

集 $D^+h(x)$称为函数 $h(x)$在点 x 的上微分。

类似地，定义函数 $h(x)$在点 $x(x\in G)$的下微分为

$$D^- h(x) = \{(p,Q) \mid (p,Q) \in R^k \times S(k), \varliminf_{y\to x} \{h(y) - h(x) - (p, y-x) - \frac{1}{2}(Q(y-x),(y-x))\} \geqslant 0\} \tag{5.4.2}$$

容易验证下面的命题成立。

命题 5.4 集 $D^+h(x)$和 $D^-h(x)$是 $R^k \times S(k)$中的闭、凸集。

记 $Dv = (D_1 v, \cdots, D_k v)$

$D^2 v = (D_i D_j v; i,j = 1,\cdots,k)$

其中 $D_i = \partial/\partial x_i (i = 1,\cdots,k)$

考虑非线性二阶偏微分方程

$$H(x, v, Dv, D^2 v) = 0 \quad x \in G \tag{5.4.3}$$

其中 $H \in C(G \times R^1 \times R^k \times S(k))$，满足下面的条件

如果 $Q \geqslant Q^*$，则

$$H(x,v,p,Q) \leqslant H(x,v,p,Q^*) \quad \forall x,v,p$$

定义 5.2 (1)如果 $v(\cdot) \in C(G)$，使得

$$H(x, v(x), p, Q) \leqslant 0, \forall (p,Q) \in D^+ v(x), \forall x \in G \tag{5.4.4}$$

称 v 为偏微方程(5.4.3)的粘性上解。

(2)如果 $v(\cdot) \in C(G)$，使得

$$H(x, v(x), p, Q) \geqslant 0 \quad \forall (p,Q) \in D^- v(x) \quad \forall x \in G \tag{5.4.5}$$

称 v 为偏微分方程(5.4.3)的粘性下解。

(3)如果 $v(\cdot) \in C(G)$既是偏微分方程(5.4.3)的粘性上解又是粘性下解，称 v 为偏微分方程(5.4.3)的粘性解。

引理 5.11 设 $v(\cdot) \in C(G)$和 $x \in G$，则$(p,Q) \in D^+ v(x)$($\in D^- v(x)$)必须且只须存在 $h(\cdot) \in C^2(G)$，使得

$$v(x) = h(x), p = Dh(x), Q = D^2 h(x) \tag{5.4.6}$$

并且只要 $y \neq x$，$v(y) < h(y)$，$(v(y) > h(y))$。

证 为书写简单起见，设 $x = 0 \in G$。下面要构造一个函数

$h(x)$满足条件(5.4.6)。

定义函数

$$W(x)=(r(x)-r(0)-(p,x)-\frac{1}{2}(Qx,x))^{+}/|x|^{2}\quad 对\ x\neq 0 \qquad (5.4.7)$$

其中

$$x^{+}=\begin{cases}x,当\ x>0\\0,当\ x\leqslant 0\end{cases}$$

则 $W(x)\geqslant 0$

用假设$(p,Q)\in D^{+}r(0)$,得

$$\lim_{x\to 0}W(x)=0 \qquad (5.4.8)$$

定义函数$g(x)$如下

$$g(x)=2\int_0^{2|x|}ds\int_0^s k(r)dr+|x|^4 \qquad (5.4.9)$$

其中

$$k(r)=\sup_{\substack{x\in G\\|x|\leqslant r}}W(x)$$

则

(1) $g(x)\geqslant k(|x|)|x|^2+|x|^4>k(|x|)|x|^2 \quad \forall\ x\neq 0$

(2) $g(\cdot)\in C^2(G),g(0)=0,Dg(0)=0,D^2g(0)=0$

事实上,$k(r)$是r的不减函数,有下式

$$\int_0^{2|x|}ds\int_0^s k(r)dr=\int_0^{2|x|}\int_0^s k(r)drds=\int_0^{2|x|}\int_r^{2|x|}k(r)dsdr$$

$$=\int_0^{2|x|}k(r)(2|x|-r)dr\geqslant\int_{|x|}^{2|x|}k(r)(2|x|-r)dr$$

$$\geqslant k(|x|)\int_{|x|}^{2|x|}(2|x|-r)dr=k(|x|)\left\{2|x|^2-\frac{3}{2}|x|^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}|x|^2k(|x|)$$

因此

$$g(x)=2\int_0^{2|x|}ds\int_0^s k(r)dr+|x|^4\geqslant k(|x|)|x|^2+|x|^4$$

$$> k(|x|)|x|^2 \quad \forall x \neq 0$$

这就证明了(1)。

从函数 $g(x)$的定义有 $g(0)=0, Dg(0)=0, k(0)=\lim_{x\to 0} W(x)=0$,所以 $D^2g(0)=0$。这就证明了(2)。

令

$$h(x) = g(x) + v(0) + (p, x) + \frac{1}{2}(Qx, x)$$

则 $h(0)=v(0)$

$Dh(x)=Dg(x)+p+Qx \Rightarrow Dh(0)=p$

$D^2h(x)=D^2g(x)+Q \Rightarrow D^2h(0)=Q$

当 $y\neq 0$ 时

$$h(y) = g(y) + v(0) + (p, y) + \frac{1}{2}(Qy, y)$$

$$> k(|y|)|y|^2 + v(0) + (p, y) + \frac{1}{2}(Qy, y)$$

$$\geqslant \left\{v(y) - v(0) - (p, y) - \frac{1}{2}(Qy, y)\right\}$$

$$+ \left\{v(0) + (p, y) + \frac{1}{2}(Qy, y)\right\} = v(y)$$

证毕

命题 5.5 设 $v(\cdot)\in C(G)$,$v(x)$是偏微分方程(5.4.3)的粘性解,必须且只须对任意的 $h\in C^2(G)$,有

对 $v-h$ 的每一局部最大值点 x 成立

$$H(x, v(x), Dh(x), D^2h(x)) \leqslant 0 \qquad (5.4.10)$$

对 $v-h$ 的每一局部最小值点 x 成立

$$H(x, v(x), Dh(x), D^2h(x)) \geqslant 0 \qquad (5.4.11)$$

证 首先证式(5.4.4)与式(5.4.10)等价。

事实上,假定式(5.4.10)成立。设$(p, Q)\in D^{+}v(x)$。取 $h\in C^2(G)$具有引理 5.11 中所述的性质。式(5.4.6)表明,x 是函数 $v(y)-h(y)$的严格整体最大值点。于是

$H(x, v(x), p, Q)=H(x, v(x), Dh(x), D^2h(x))\leqslant 0, \forall x$ 是函数$v-h$的最大值点。

反之，设式(5.4.4)成立。假定 $h\in C^2(G)$ 和 x 是函数 $v-h$ 的局部最大值点，即是

$$v(y)-h(y)\leqslant v(x)-h(x)，当 y 在 x 的邻域内。\quad (5.4.12)$$

于是有

$$\begin{aligned} h(y)= & h(x)+(Dh(x),y-x) \\ & +\frac{1}{2}(D^2h(x)(y-x),(y-x)) \\ & +o(|y-x|^2) \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

由不等式(5.4.12)和式(5.4.13)，得

$$\begin{aligned} 0 & \geqslant v(y)-v(x)-(h(y)-h(x)) \\ & =v(y)-v(x)-(Dh(x),y-x)-\frac{1}{2}(D^2h(x)(y-x), \\ & (y-x))+o(|y-x|^2) \end{aligned}$$

在上面的不等式中，令 $y\to x$ 得

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{y\to x}} & (v(y)-v(x)-(Dh(x),y-x) \\ & -\frac{1}{2}(D^2h(x)(y-x),(y-x)))\leqslant 0 \end{aligned}$$

因此，$(Dh(x),D^2h(x))\in D^+v(x)$。

由假设式(5.4.4)成立，因此

$$H(x,v(x),Dh(x),D^2h(x))\leqslant 0$$

即式(5.4.10)成立。

现在证明式(5.4.5)与式(5.4.11)等价。

先设式(5.4.11)成立。任意 $(p,Q)\in D^-v(x)$。取 $h\in C^2(G)$ 具有引理 5.11 中所述的性质。式(5.4.6)表明，点 x 是函数 $v-h$ 的整体最小值点。依引理 5.11，$p=Dh(x)$，$Q=D^2h(x)$。由式(5.4.11)得式(5.4.5)。

反之，设式(5.4.5)成立，任一 $h\in C^2(G)$，点 x 是函数 $v-h$ 的局部最小值点，则

$$v(y)-h(y)\geqslant v(x)-h(x)，y 在点 x 的邻域内。$$

(5.4.14)

将函数 $h\in C^2(G)$ 展开得

$$h(y)=h(x)+(Dh(x),y-x)+\frac{1}{2}(D^2h(x)(y-x),$$

$$(y-x))+o(|y-x|^2) \qquad (5.4.15)$$

由式(5.4.14)和式(5.4.15)得

$$0\leqslant v(y)-v(x)-(h(y)-h(x))$$

$$=v(y)-v(x)-(Dh(x),y-x)-\frac{1}{2}(D^2h(x)(y-x),$$

$$(y-x))+o(|y-x|^2)$$

在上式中，令 $y\to x$ 得

$$\lim_{y\to x}\{v(y)-v(x)-(Dh(x),y-x)$$

$$-\frac{1}{2}(D^2h(x)(y-x),(y-x))\}\geqslant 0$$

因此

$$(Dh(x),D^2h(x))\in D^-v(x)$$

依假设式(5.4.5)成立，于是

$$H(x,v(x),Dh(x),D^2h(x))\geqslant 0$$

这就证明了式(5.4.11)成立。 证毕

命题 5.6 粘性解的稳定性：

(1)设 $v_n(\cdot)\in C^2(G)$ 是 $H_n(x,v,Dv,D^2v)=0$ 的粘性解。

(2)在区域 G 的任一紧集 Ω 上，一致地 $v_n\to v$，$H_n\to H$ $(n\to\infty)$（在各个变量变化的紧集上）。

则 v 是方程(5.4.3)的粘性解。

证 设 $h\in C^2(G)$ 和 x 是函数 $v-h$ 的一个局部严格最大值点。对一个以 x 为圆心，r 为半径的小球 $S(x,r)$，使得 $S(x,r)\subset G$ 和

$$v(x)-h(x)>\max_{y\in\partial S(x,r)}(v(y)-h(y)) \qquad (5.4.16)$$

依假设，在 $\overline{S}(x,r)$ 内，$v_n\to v$ 一致地成立。所以对足够大的 $N=N(r)$，有

$$\max_{y\in S(x,r)}(v_N-h)>\max_{y\in\partial S(x,r)}(v_N-h) \qquad (5.4.17)$$

设 $x_N \in \bar{S}(x,r)$ 是函数 $v_N - h$ 在 $\bar{S}(x,r)$ 上的最大值点。由式(5.4.17)得，$x_N \in S(x,r)$ 和

$$H_N(x_N, v_N(x_N), Dh(x_N), D^2h(x_N)) \leqslant 0 \qquad (5.4.18)$$

当 $r \to 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_N \to x \\ Dh(x_N) \to Dh(x) \end{cases}, \begin{cases} v_N(x_N) \to v(x) \\ D^2h(x_N) \to D^2h(x) \end{cases} \qquad (5.4.19)$$

由假设 H_N 在紧集上一致收敛到 H，则

$$H_N(x_N, v_N(x_N), Dh(x_N), D^2h(x_N))$$
$$\to H(x, v(x), Dh(x), D^2h(x)) \qquad (5.4.20)$$

由式(5.4.20)和式(5.4.18)，得

$H(x, v(x), Dh(x), D^2h(x)) \leqslant 0$，$\forall x$ 是函数 $v-h$ 的局部严格最大值点。 (5.4.21)

式(5.4.21)表明函数 $v(x)$ 是偏微分方程(5.4.3)的粘性上解。同理可证 $v(x)$ 是偏微分方程(5.4.3)的粘性下解。因此 v 是偏微分方程(5.4.3)的粘性解。 证毕

现在返回到 HJB 偏微分方程(5.2.22)，讨论该方程的粘性解与随机控制问题(5.1.1)—(5.1.2)的性能指标的最优值函数 $V(t,x)$ 之间的关系。

令 $G = (0,T) \times R^k \quad (T < \infty)$

$$H(t,x,r,p,Q) = p_0 - \sup_{u \in U}\left\{ \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x,u)Q_{ij} + \sum_{i=1}^{k} g_i p_i \right.$$

$$\left. G(x,u)r(x) + f(x,u) \right\} \qquad (5.4.22)$$

$\times R^k$)和 $V(0,x)=h(x)$,在粘性解意义下满足方程

$$H(t,x,V(t,x),DV(t,x),D^2V(t,x))=0 \quad (5.4.23)$$

证 任意$(p,Q)\in D^{+}V(t,x)$。适当修改引理 5.11,有一函数 $h(\cdot,\cdot)\in C_l((0,T)\times R^k)\cap C_0^2((0,T)\times R^k)$,具有以下性质

$$h(t,x)=V(t,x),p=Dh(t,x),Q=D^2h(t,x),$$
$$V(s,y)<h(s,y)\quad \forall (s,y)\neq(t,x) \quad (5.4.24)$$

函数 $V(t,x)$在 $\overline{G}$ 上有界,用定理 5.1,有

$$h(t,x)=V(t,x)=V(s,x,V(t-s,\cdot))$$
$$\leqslant V(s,x,h(t-s,\cdot)) \quad (5.4.25)$$

对函数 $V(s,x,V(t-s,\cdot))$用 Itô 公式和类似于定理 5.3 的证明方法,可得

$$0\geqslant h(t,x)-V(s,x,h(t-s,\cdot))$$
$$=V(t,x)-V(s,x,h(t-s,\cdot))$$
$$=E_x\int_s^t\{h_t-(L(u(s))h(t,x)-C(x,u(s))h(t,x)$$
$$+f(x,u(s)))\}\mathrm{d}t+o(|t-s|)$$

由上式和式(5.2.19)得

$$H(t,x,V(t,x),DV(t,x),D^2V(t,x))\leqslant 0$$

这就证明了 $V(t,x)$是 HJB 偏微分方程(5.2.22)的粘性上解。同理,可以证明 $V(t,x)$是方程(5.2.22)的粘性下解。因此 $V(t,x)$是方程(5.2.22)的粘性解。 证毕

§5.5 随机最优控制

现在我们返回到随机控制问题(5.1.1)—(5.1.2),通过与这个随机控制问题相关联的 HJB 偏微分方程(5.3.29)的解来构造随机控制问题(5.1.1)—(5.1.2)的反馈控制律和最优控制。

定理 5.7 设 U 是 R^l 中的紧集,定理 5.5 的条件式(5.3.28)成立,$V(t,x)=V(t,x,h)$是 HJB 偏微分方程(5.3.29)的解,函数 $\hat{u}(t,x)$使得函数

$$H(t,x,u)=L(u)V(T-t,x)-C(x,u)V(T-t,x)+f(x,u)$$

在 U 上达到最大，即

$$\sup_{u\in U} H(t,x,u)=H(t,x,\hat{u}(t,x)) \tag{5.5.1}$$

让 $\hat{\xi}(t)$ 是随机微分方程

$$d\xi(t)=g(\xi(t),\hat{u}(t,\xi(t)))dt+\sigma(\xi(t),\hat{u}(t,\xi(t)))dw,$$

$$\xi(0)=x\in R^k \tag{5.5.2}$$

的解，则 $\hat{u}(t)=\hat{u}(t,\hat{\xi}(t))$ 是随机控制问题(5.1.1)—(5.1.2)的最优控制。

证 函数 $H(t,x,u)$ 对每一 $u\in U$，关于 (t,x) 可测，对每一 (t,x) 关于 u 连续。依 Fillipov's 定理，存在一个 Borel 函数 $\hat{u}(\cdot,\cdot)$：$R^1_+\times R^k\to U$ 使得式(5.5.1)成立。由条件可知，$\hat{\sigma}(t,x)=\sigma(x,\hat{u}(t,x))$ 和 $\hat{g}(t,x)=g(x,\hat{u}(t,x))$ 是有界的 Borel 可测函数和 $\hat{\sigma}$ 是一致正定的，随机微分方程(5.5.2)存在唯一弱解 $\hat{\xi}(t)$。

函数 $V(t,x)$ 是 HJB 方程(5.3.29)的解，则 $V(T-t,x)$ 是偏微分方程

$$-\frac{\partial V(T-t,x,h)}{\partial t}=\sup_{u\in U}\{L(u)V(T-t,x,h)$$

$$-C(x,u)V(T-t,x,h)+f(x,u)\}$$

$$V(T-t,x,h)|_{t=T}=h(x) \tag{5.5.3}$$

的解。

对函数 $F(t,x)=\exp\left\{-\int_0^t C(\hat{\xi}(\tau),\hat{u}(\tau))d\tau\right\}V(T-t,x)$ 和过程 $\hat{\xi}(t)$ 用 Itô 公式得

$$E_x\exp\left\{-\int_0^T C(\hat{\xi}(\tau),\hat{u}(\tau))d\tau\right\}V(0,\hat{\xi}(T))-V(T,x)$$

$$=E_x\int_0^T\{F_t(t,\hat{\xi}(t))+L(\hat{u}(t))V(T-t,\hat{\xi}(t))\}dt$$

$$=E_x\int_0^T\{L(\hat{u}(t))V(T-t,\hat{\xi}(t))-C(\hat{\xi}(t),\hat{u}(t))$$

$$\times V(T-t,\hat{\xi}(t))+V_t(T-t,\hat{\xi}(t))\}e(0,t,\hat{u})dt$$

$$= -E_x\int_0^T \exp\left(-\int_0^t C(\hat{\xi}(\tau),\hat{u}(\tau))\mathrm{d}\tau\right) f(\hat{\xi}(t),\hat{u}(t))\mathrm{d}t$$

用初始条件 $V(0,x)=h(x)$，上式可写为

$$E_x e(0,T,\hat{u}(\cdot))h(\hat{\xi}(T)) - V(T,x)$$
$$= -E_x\int_0^T e(0,t,\hat{u}(\cdot))f(\hat{\xi}(t),\hat{u}(t))\mathrm{d}t$$

即是

$$\begin{aligned} V(T,x) &= E_x\int_0^T e(0,t,\hat{u}(\cdot))f(\hat{\xi}(t),\hat{u}(t))\mathrm{d}t \\ &\quad + E_x e(0,T,\hat{u}(\cdot))h(\hat{\xi}(T)) \\ &= V(T,x,h,\hat{u}(\cdot)) \text{（用式(5.5.3)）} \end{aligned} \tag{5.5.4}$$

对函数 $V(T-t,x)e(0,t,u(\cdot))$ 和过程 $\xi(t)$ 用 Itô 公式得

$$E_x V(0,\xi(T))e(0,T,u(\cdot)) - V(T,x)$$
$$= E_x\int_0^T \{L(u(t))V(T-t,\xi(t)) - C(\xi(t),u(t))$$
$$\times V(T-t,\xi(t)) + V_t(T-t,\xi(t))\}e(0,t,u(\cdot))\mathrm{d}t$$
$$\leqslant -E_x\int_0^T f(\xi(t),u(t))e(0,t,u(\cdot))\mathrm{d}t \quad \text{（用式(5.5.3)）}$$

因此

$$\begin{aligned} V(T,x) &\geqslant E_x\int_0^T f(\xi(t),u(t))e(0,t,u(\cdot))\mathrm{d}t \\ &+ E_x e(0,T,u(\cdot))h(\xi(T)),\ \forall\, u(\cdot)\in U_{ad} \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

由式(5.5.4)和式(5.5.5)得 $\hat{u}(t)=\hat{u}(t,\hat{\xi}(t))$ 是控制问题(5.1.1)--(5.1.2)的最优控制。　　证毕

由定理 5.7 已知，用动态规划方法求随机控制问题(5.1.1)--(5.1.2)的最优控制的步骤如下：

第一步　求 HJB 偏微分方程(5.3.29)的解 $V(t,x)$；

第二步　用第一步得的函数 $V(t,x)$，求函数 $\hat{u}(t,x)$ 满足

$$\sup_{u\in U}\{L(u)V(t,x) - C(x,u)V(t,x) + f(x,u)\}$$
$$= L(\hat{u}(t,x))V(t,x) - C(x,\hat{u}(t,x))V(t,x)$$
$$+ f(x,\hat{u}(t,x)) \quad \forall\,(t,x)\in(0,T)\times R^r$$

第三步 用已知函数 $\hat{u}(t,x)$，求随机微分方程

$$d\xi(t)=g(\xi(t),\hat{u}(t,\xi(t)))dt+\sigma(\xi(t),\hat{u}(t,\xi(t)))dw,$$
$$\xi(t)=x$$

的解 $\hat{\xi}(t)$；

第四步 用反馈控制律 $\hat{u}(t,x)$和随机过程$\hat{\xi}(t)$，构造过程 $\hat{u}(t)=\hat{u}(t,\hat{\xi}(t))$

依定理 5.7、$\hat{u}(t)$是随机控制问题(5.1.1)－(5.1.2)的最优控制。由上述步骤已知，最优控制问题的动态规划方法，在求最优控制 $\hat{u}(t)$的同时就得到反馈控制律 $\hat{u}(t,x)$和最优值函数 $V(t,x)$。这是动态规划方法的特点。

第六章　具有部分观测信息的随机系统的最优控制

在第四章和第五章中讨论的随机系统的控制问题，假定了动态系统的状态是可观测的。但是在许多实际问题中，观测的量不是动态系统的状态，而是依赖于系统状态的另外的量，并且除了动态系统有噪声干扰外，测量系统也有噪声干扰。这样的随机系统的控制问题，称为具有部分观测信息的随机系统的控制问题。研究这种类型的系统的最优控制问题，较之以具有完全观测信息的随机系统的控制问题要困难和复杂得多。在本世纪 80 年代才建立起的非正规的条件分布测度值的随机过程，满足 Zakai 随机微分方程。在已知动态系统的观测量的条件下，对动态系统的状态进行滤波，得到非线性滤波方程。这个非线性滤波方程一般是不封闭的。因此，需要讨论非正规条件分布，从而导出一个具有测度值的随机过程满足的称之为 Zakai 方程的线性随机微分方程。如果这个测度值的随机过程具有概率密度，则具有测度值的随机过程满足的 Zakai 方程是这个概率密度函数满足的随机偏微分方程。从而将一个具有部分观测信息的非线性随机系统的最优控制问题，归结成为一个状态方程是 Zakai 线性随机偏微分方程而性能指标为对状态是线性的随机分布参数系统的最优控制问题。此时，控制函数出现在 Zakai 随机偏微分方程的偏微分算子的系数中，这与通常的随机分布参数系统的控制问题控制函数出现在偏微分方程中是很不相同的。在这一章，对于 Zakai 随机偏微分方程的最优控制问题，仍用本书前几章使用过的方法，即在较弱的条件下和简洁的方法建立最优控制的最大值原理。

§6.1 问题的叙述

设 x_t 是动态系统的状态过程，y_t 是观测过程，u_t 是控制过程，$t\in[0,T]$，T 是固定的。状态过程和观测过程用下面的随机微分方程来描述

$$\mathrm{d}x_t = g(x_t,y_t,u_t)\mathrm{d}t + \sigma(x_t,y_t)\mathrm{d}w_t \qquad (6.1.1)$$

$$x_0 = \hat{x}_0$$

$$\mathrm{d}y_t = h(x_t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}\hat{w}_t \qquad (6.1.2)$$

$$y_0 = 0$$

假定 x_t 取值于 k 维欧氏空间 R^k，y_t 取值于 R^m，u_t 取值于 R^r。初始状态 $\hat{x}_0$ 有分布 μ。观测初始值 $y_0=0$。动态系统噪声 w_t 与观测噪声 $\hat{w}_t$ 是分别取值于 R^d，R^m 的相互独立的标准的 Wiener 过程，u_t 取值于 R^r 空间中的子集 U。

已给函数 g，σ 和 h 为

$$g(\cdot,\cdot,\cdot):R^k\times R^m\times R^r\to R^k$$

$$\sigma(\cdot,\cdot):R^k\times R^m\to \mathscr{L}(R^d,R^k)$$

$$h(\cdot):R^k\to R^m$$

其中 $\mathscr{L}(R^d,R^k)$ 是 $k\times d$ 实矩阵全体。

问题是寻求 u_t，使得系统(6.1.1)—(6.1.2)的性能指标

$$J(u) = E\left\{\int_0^T f(x_t,u_t)\mathrm{d}t + G(x_T)\right\} \qquad (6.1.3)$$

极小化

其中

$$f(\cdot,\cdot):R^k\times R^r\to R^1$$

$$G(\cdot):R^k\to R^1$$

为了下面讨论问题方便，我们假定

(A_1) $g(x,y,u)$ 是有界连续的 k 维矢值函数，$g(\cdot,y,\cdot)$ 在 $R^k\times R^r$ 上Lipschitz 连续，Lipschitz 常数不依赖于 y。

(A_2) $\sigma(x,y)$ 是有界连续函数阵，并且 $\sigma(\cdot,y)$ 是 Lipschitz 连续，Lipschitz 常数与 y 无关。

(A_3) $h(\cdot)\in C_b^2(R^k,R^m)$

在下面将用记号：$C_b(R^N)$表示在欧氏空间 R^N 上的有界连续实值函数集；$C_0(R^N)$表示具有紧支集的连续函数的空间；$C_b^k(R^N)$，$C_0^k(R^N)$分别表示具有阶$\leqslant k$ 的偏导数在 $C_b(R^N)$，$C_0^k(R^N)$中的函数的空间。类似地，如果函数是 R^M 维的，写为 $C_b^k(R^N,R^M)$，$C_0^k(R^N,R^M)$。

我们在典型样本空间

$$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3\times\Omega_4$$

中来叙述问题，这里

$$\Omega_1=C([0,T],R^d),\qquad \Omega_2=C([0,T],R^k),$$

$$\Omega_3=\{y(t)\,|\,y(\cdot)\in C([0,T],R^m),y(0)=0\},$$

$$\Omega_4=L^2((0,T),U)$$

样本空间 Ω 中的元 $\omega=(w(\cdot),x(\cdot),y(\cdot),u(\cdot))$满足

$$\omega(t)=(w_t(\omega),x_t(\omega),y_t(\omega),u_t(\omega)),0\leqslant t\leqslant T$$

Ω_1，Ω_2 和 Ω_3 中的元是连续函数，把连续函数在区间$[0,T]$上的极大值作为范数来引入这些空间的拓扑，将 $L^2((0,T),R^r)$中弱收敛作为 Ω_4 的拓扑来引入。

约定

$$\Omega^1=\Omega_1\times\Omega_2,\Omega^2=\Omega_3\times\Omega_4$$

因此，Ω^1，Ω^2 中的元分别是$(w.,x.)$，$(y.,u.)$。

令

$$\mathscr{F}_t(w)=\sigma(w_s;0\leqslant s\leqslant t)$$

表示坐标过程 $w_t(\omega)$产生的 σ-域。类似地定义 $\mathscr{F}_t(x)$，$\mathscr{F}_t(y)$和

$$\mathscr{F}_t(u)=\sigma(v_s;0\leqslant s\leqslant t)$$

σ-域 $\mathscr{G}_t^1,\mathscr{G}_t^2,\mathscr{H}_t$ 定义为

$$\mathscr{G}_t^1 = \mathscr{F}_t(w) \times \mathscr{F}_t(x), \mathscr{G}_t^2 = \mathscr{F}_t(y) \times \mathscr{F}_t(u)$$

$$\mathscr{H}_t = \mathscr{G}_t^1 \times \mathscr{G}_t^2 = \mathscr{F}_t(w) \times \mathscr{F}_t(x) \times \mathscr{F}_t(y) \times \mathscr{F}_t(u)$$

$\mathscr{F}_T(u)$ 是 Ω_4 的 σ-域，因此 $\mathscr{G}_T^2$ 是 Ω^2 的 σ-域。

记 $u=u.$，$y=y.$ 是控制过程与观测过程的样本轨道。因此 $(y,u)\in\Omega^2$。在条件(A_1)与(A_2)之下，随机微分方程(6.1.1)存在轨道唯一解 x_t，具有初始值 $x\in R^k$。因此亦是在概率意义下的唯一解。

在$(\Omega,\mathscr{G}_T^1)$上定义概率测度

$$\bar{P}_x^{y,u}(A) = P(\omega\,|\,(w.(\omega),x.(\omega)) \in A) \quad \forall A \in \mathscr{G}_T^1$$

概率测度 $\bar{P}_x^{y,u}(\cdot)$表示在已给(y,u)条件下，$(w.,x.)$的概率。$\bar{P}_x^{y,u}$ 的下标"x"表示 $x.(\omega)$依赖于初始值 $x\in R^k$。

引理 6.1 概率测度 $\bar{P}_x^{y,u}$ 连续地依赖于(x,y,u)。

证 记 $\hat{x}_t=(w_t,x_t)$。$\hat{x}_t$ 的样本空间是$(\Omega^1,\mathscr{G}_t^1)$。对$\forall f\in C_0^2(R^{d+k})$，令

$$M_f(t) = f(\hat{x}_t) - f(\hat{x}_0) - \int_0^t \hat{L}_s(\hat{x}_s)\mathrm{d}s$$

其中

$$\hat{L}_t f = \frac{1}{2}\Delta_w f + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(t,x) f_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t,x) f_{x_i w_j} + g(t,x,u)\cdot\nabla_x f$$

当(y,u)固定时，记 $\sigma(t,x)=\sigma(x,y_t)$，$a_{ij}(t,x)=(\sigma\sigma^*)_{ij}$，$g(t,x,u)=g(x,y_t,u)$。

方程(6.1.1)的解等价于鞅问题的解。鞅问题是找一个在 $\mathscr{G}_T^1$ 上的概率测度 P_x，使得 $P_x(\hat{x}_0=(0,x))=1$ 和 $M_f(t)$是一个 P_x—$\{\mathscr{G}_t^1\}$鞅，$\forall f\in C_0^2(R^{d+k})$。在$(A_1)$和$(A_2)$的条件下，方程(6.1.1)存在轨道唯一解。因此等价于存在唯一鞅问题的解 P_x。如果 g,σ 和 u 用 g_n,σ_n 和 $u^{(n)}$代替时，鞅问题的解写为 P_{nx}。

现在假定 g_n,σ_n 满足 Lipschitz 条件，Lipschitz 常数不依赖于 y，$g_n=g(t,x,u^{(n)})\to g=g(t,x,u)$，$\sigma_n\to\sigma$ 在$[0,T]\times R^k$ 上一致地收敛，

$u^{(n)}\to u(n\to\infty)$在$L^2((0,T),R^r)$上收敛和设$x_n\to x$。要证$P_n\Rightarrow P_x(n\to\infty)$。

事实上，概率测度$P_n\triangleq P_{nx}(n=1,2,\cdots)$是态紧的。任何子列都存在一个次子列(仍记为$P_n$)$P_n$趋于极限$P_0$。只要证明$P_0$是鞅问题的解，由鞅问题解的唯一性，有$P_0=P_x$。因此$P_n\Rightarrow P_x$

显然

$$P_{nx_n}(\hat{x}^{(n)}=(0,x_n))=1\quad\forall\ n$$

因此，当$n\to\infty$时，$P_0(\hat{x}=(0,x))=1$

其次，$\forall\ f\in C_0^2(R^{d+k})$，有

$$\begin{aligned}\hat{L}_{ns}f-\hat{L}_sf=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}^{(n)}f_{x_ix_j}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^{(n)}f_{x_iw_j}\\&+g(t,x_t,u^{(n)})\cdot\nabla_xf-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}f_{x_ix_j}\\&-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}f_{x_iw_j}-g(t,x_t,u)\cdot\nabla_xf\\=&(g(t,x_t,u^{(n)})-g(t,x_t,u))\cdot\nabla_xf+Q_n(s,x)\end{aligned}$$

其中

$$a_{ij}^{(n)}=(\sigma_n\sigma_n^*)_{ij},\sigma_n=(\sigma_{ij}^{(n)}),$$

$Q_n(s,x)$在$[0,T]\times R^k$的紧集上一致趋于$0(n\to\infty)$。

用$\|u^{(n)}-u\|\to 0(n\to\infty)$的假定，有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^t(g(s,x_s,u_s^{(n)})-g(s,x_s,u_s))\cdot\nabla_xf\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant\int_0^t|g(s,x_s,u_s^{(n)})-g(s,x_s,u_s)||\nabla_xf|\mathrm{d}s\\&\leqslant g_1\left(\int_0^T|u_s^{(n)}-u_s|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_0^T|\nabla_xf|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\to 0(n\to\infty)\end{aligned}$$

对$t\in[0,T]$一致地成立。

因此 $$\int_0^t\hat{L}_{ns}f(\hat{x}_s)\mathrm{d}s\to\int_0^t\hat{L}_sf(\hat{x}_s)\mathrm{d}s\quad(n\to\infty)$$

$\forall\ tL\in[0,T]$一致地成立。 (6.1.4)

依定义

$$M_f^{(n)}(t) = f(\hat{x}_t) - f(\hat{x}) - \int_0^t \hat{L}_{ns} f(\hat{x}_s) \mathrm{d}s$$

是 P_n—$\{\mathscr{G}_t^1\}$鞅。于是

$$E_n(M^{(n)}(t) \mid \mathscr{G}_s^1) = M^{(n)}(s) \quad \forall\, t > s$$

或者，等价地，有

$$\int_A M^{(n)}(t) \mathrm{d}P_n = \int_A M^{(n)}(s) \mathrm{d}P_n \quad \forall\, A \in \mathscr{G}_s^1, \forall\, t > s \tag{6.1.5}$$

这里把 $M_f^{(n)}(t)$ 简单记为 $M^{(n)}(t)$。

用式(6.1.4)，$\forall\, A \in \mathscr{G}_s^1$，有

$$\left| \int_A M^{(n)}(s) \mathrm{d}P_n - \int_A M(s) \mathrm{d}P_n \right| \leqslant \int_A |M^{(n)}(s) - M(s)| \mathrm{d}P_n$$
$$\leqslant \sup_{[0,T] \times A \cap \mathrm{supp}(f)} |M^{(n)}(t) - M(t)| P_n(A) \to 0 (n \to \infty) \tag{6.1.6}$$

依上述 $P_n \Rightarrow P_0 (n \to \infty)$，则

$$\int_A M(s) \mathrm{d}P_n \to \int_A M(s) \mathrm{d}P_0 (n \to \infty)$$

于是由式(6.1.5)和式(6.1.6)，得

$$\int_A M^{(n)}(t) \mathrm{d}P_n - \int_A M(s) \mathrm{d}P_0 = \int_A M^{(n)}(s) \mathrm{d}P_n - \int_A M(s) \mathrm{d}P_n$$
$$+ \int_A M(s) \mathrm{d}P_n - \int_A M(s) \mathrm{d}P_0 \to 0 (n \to \infty) \forall\, A \in \mathscr{G}_s^1, t > s \tag{6.1.7}$$

与式(6.1.6)和式(6.1.7)同理可得

$$\int_A M^{(n)}(t) \mathrm{d}P_n - \int_A M(t) \mathrm{d}P_0 = \int_A M^{(n)}(t) \mathrm{d}P_n - \int_A M(t) \mathrm{d}P_n$$
$$+ \int_A M(t) \mathrm{d}P_n - \int_A M(t) \mathrm{d}P_0 \to 0 (n \to \infty) \forall\, A \in \mathscr{G}_t^1, \forall\, t > 0 \tag{6.1.8}$$

由式(6.1.7)与式(6.1.8)得

$$\int_A M(t)\mathrm{d}P_0 = \int_A M(s)\mathrm{d}P_0 \quad \forall\ A \in \mathscr{G}_s^1, \forall\ t > s$$

即

$$E_0(M(t)|\mathscr{G}_s^1) = M(s) \quad \forall\ t > s$$

上式表明 $M_f(t)$是 P_0—$\{\mathscr{G}_t^1\}$鞅,$\forall\ f_0 \in C_0^2(R^{d+k})$。从而 P_0 是鞅问题的解。 证毕

定义 6.1 如果映射 $u(\cdot):\Omega_3 \to \Omega_4$,使得 $u(\cdot)$是 $\mathscr{F}_T(y)/\mathscr{F}_T(u)$可测,称 $u(\cdot)$为容许控制。一切容许控制的集记为 U_{ad}。

记 W 为可测空间$(C([0,T],R^m),\mathscr{B}_T(R^m))$上的 Wiener 测度,$\mathscr{B}_T(R^m)$表示空间 $C([0,T],R^m)$上的 Borel σ-域。依第五章的命题 5.1,$\mathscr{B}_T(R^m) = \mathscr{F}_T(y)$

对任一$\underline{u} \in U_{ad}$,令

$$\pi(\mathrm{d}y,\mathrm{d}u) = \delta_{\underline{u}(y)}(\mathrm{d}u)W(\mathrm{d}y) \tag{6.1.9}$$

其中 δ_u 是$(\Omega_4,\mathscr{F}_T(u))$上的 Dirac 测度,$\delta_{\underline{u}(y)}$表示测度集中在$\underline{u}(y)$。

定义概率测度

$$\mathring{P}_\pi(\mathrm{d}w,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}u) = \overline{P}^{y,u}(\mathrm{d}w,\mathrm{d}x)\pi(\mathrm{d}y,\mathrm{d}u)$$

是$(\Omega,\mathscr{F}_T)$上的概率测度,其中

$$\overline{P}^{y,u}(A) = \int_{R^k} \overline{P}_x^{y,u}(A)\mathrm{d}\mu(x) \quad \forall\ A \in \mathscr{G}_T^1 \tag{6.1.10}$$

在映射$(w,x,y,u) \to (y,u)$之下,$\mathring{P}_\pi$ 的投影是 π。如果 $g(w,x)$对 $\mathscr{G}_t^1$ 可测,并且 $\overline{E}^{y,u}g(w,x)$存在,则 $\overline{E}^{y,u}g(w,x)$对 $\mathscr{G}_t^2$ 可测。依赖于(y,u)的概率测度族 $\overline{P}^{y,u}(\cdot)$是对$(w.,x.)$的正则条件分布。用 $\overline{E}^{y,u},\mathring{E}_\pi$ 表示对概率测度 $\overline{P}^{y,u},\mathring{P}_\pi$ 的数学期望。

命题 6.1 对任一 $\mathscr{H}_t$ 可测的 ψ,使得 $\mathring{E}_\pi|\psi| < \infty$,则

$$\mathring{E}_\pi(\psi|\mathscr{G}_t^2) = \overline{E}^{y,u}(\psi) \quad \pi - a.e. \tag{6.1.11}$$

证 因为$\mathring{E}_\pi(\psi|\mathscr{G}_t^2)$,$\overline{E}^{y,u}(\psi)$都对 σ-域 $\mathscr{G}_t^2$ 可测。对任一 $A \in \mathscr{G}_t^2 \Longleftrightarrow \mathbf{A} = \Omega_1 \times \Omega_3 \times A \in \mathscr{H}_t \Rightarrow \mathscr{G}_t^2 \subset \mathscr{H}_t$。则

$$\int_A \mathring{E}_\pi(\psi|\mathscr{G}_t^2)\mathrm{d}\pi = \int_{\Omega^2} I_A \mathring{E}_\pi(\psi|\mathscr{G}_t^2)\mathrm{d}\pi = \int_{\Omega^2} \mathring{E}_\pi(\psi I_A|\mathscr{G}_t^2)\mathrm{d}\pi$$

$$= \int_{\Omega^1\times\Omega^2} \mathring{E}_\pi(\psi I_A|\mathscr{G}_t^2)\mathrm{d}\bar{P}^{t,\eta}\mathrm{d}\pi = \mathring{E}_\pi(\mathring{E}_\pi(\psi I_A|\mathscr{G}_t^2))$$

$$= \mathring{E}_\pi(\psi I_A) = \int_{\Omega^1\times\Omega^2}\psi I_A\mathrm{d}\bar{P}^{t,\eta}\mathrm{d}\pi$$

$$= \int_{\Omega^2} I_A\left(\int_{\Omega^1}\psi\mathrm{d}\bar{P}^{t,\eta}\right)\mathrm{d}\pi = \int_A \bar{E}^{t,\eta}(\psi)\mathrm{d}\pi \quad \forall\ A\in\mathscr{G}_t^2$$

由此得

$$\mathring{E}_\pi(\psi|\mathscr{G}_t^2) = \bar{E}^{t,\eta}(\psi) \quad \pi - a.s.$$

证毕

对$\forall\ s,t\in[0,T]$,$s<t$,定义

$$Z_t^s = \exp\left\{\int_s^t h^*(x_\tau)\mathrm{d}y_\tau - \frac{1}{2}\int_s^t h^*(x_\tau)h(x_\tau)\mathrm{d}\tau\right\} \tag{6.1.12}$$

记号"$*$"表示列向量的转置。Z_t^s是概率空间$(\Omega,\mathscr{H}_t,\mathring{P}_\pi)$上的随机变量。

依前面所述,W是Wiener测度,依π的定义(6.1.9),$\{y_t\}$是$\pi-\{\mathscr{G}_t^2\}$Wiener过程。因此,$\{y_t\}$是$\mathring{P}_\pi-\{\mathscr{G}_t^2\}$Wiener过程。

现在定义P_π如下:

$$\mathrm{d}P_\pi/\mathrm{d}\,\mathring{P}_\pi|_{\mathscr{H}_t} = Z_t^0 \tag{6.1.13}$$

依假定(A_3),$h(x)$是有界函数,我们得

$$P_\pi(\Omega) = \int_\Omega Z_t^0\mathrm{d}\,\mathring{P}_\pi = \mathring{E}_\pi(Z_t^0) = 1 \quad \forall\ t\in[0,T]$$

因此,$\forall\ t\in[0,T]$,P_π是$(\Omega,\mathscr{H}_t)$上的概率测度。

命题6.2 令

$$\hat{w}_t = y_t - \int_0^t h(x_s)\mathrm{d}s$$

则$\hat{w}_t$与w_t是关于P_π独立的标准Wiener过程,并且x_t,w_t和$\hat{w}_t$对P_π-$a.s.$满足随机微分方程(6.1.1)—(6.1.2)。

证 依前面所述,w_t与y_t是对$\mathring{P}_\pi$独立的标准Wiener过程。因此,(w_t,y_t)是一个$\mathring{P}_\pi$的$d+m$维的标准Wiener过程。依式(6.1.12)和Girsanov定理,$(w_t,\hat{w}_t)$是一个P_π标准Wiener过程。因为方程

(6.1.1)是$\mathring{P}_\pi-a.s.$成立。依P_π的定义式(6.1.13)，P_π对$\mathring{P}_\pi$绝对连续，所以方程(6.1.1)对$P_\pi-a.s.$成立。由$\hat{w}_t$的定义，方程(6.1.2)成立。　　证毕

§6.2　非正规条件分布

给定直到时刻t的控制和观测，下面将引入x_t的非正规条件分布。由式(6.1.12)定义的$\mathring{Z}_t$是$\mathring{P}_\pi$—鞅。取一个$\mathring{P}_\pi$—鞅模型，使得$\mathring{Z}_t$是$\mathscr{H}_t$对t可测，$t\in[0,T]$。

任取一$f\in C_b(R^n)$，取$\psi=f(x_t)\mathring{Z}_t$，$\psi$对$\mathscr{H}_t$可测，依命题6.1，有

$$\mathring{E}_\pi(f(x_t)\mathring{Z}_t|\mathscr{G}_t^\circ)=\overline{E}^{y,u}(f(x_t)\mathring{Z}_t),\pi-a.s.,t\in[0,T] \tag{6.2.1}$$

下面将用另一种方法来改写公式(6.2.1)，使得公式(6.2.1)对一切(y,u)定义，而不只是对$\pi-a.s.$定义和连续地依赖于(y,u)。

对函数$h(x)$和随机过程x_t用Itô公式，求出$h(x_t)$的随机微分

$$dh(x_t)=(L_th)dt+\nabla h\cdot\sigma(x_t)dw_t$$

再用Itô公式，求出$h^*(x_t)\cdot dy_t$的微分。因为w_t与y_t对概率测度$\mathring{P}_\pi$是独立的Wiener过程，有

$$\begin{aligned}h^*(x_t)dy_t&=d(h^*\cdot y_t)-y_t^*\cdot dh\\&=d(h^*\cdot y_t)-y_t^*\cdot\nabla h\cdot\sigma(x_t)dw_t-y_t^*\cdot(L_th)dt\end{aligned}$$

或者写成下面的积分形式

$$\begin{aligned}\int_s^t h^*(x_\tau)\cdot dy_\tau&=h^*(x_t)\cdot y_t-h^*(x_s)\cdot y_s-\int_s^t y_\tau^*L_\tau h(x_\tau)d\tau\\&\quad-\int_s^t y_\tau^*\cdot\nabla h(x_\tau)\cdot\sigma(x_\tau)dw_\tau\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

其中

$$L_\tau=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y_\tau)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}g_i(x,y_\tau,u_\tau)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{6.2.3}$$

$$a_{ij} = (\sigma\sigma^*)_{ij}, (i,j = 1,2,\cdots,k)$$

由式(6.2.2)和式(6.1.12)，得

$$\exp(h^*(x_s)\cdot y_s)Z_t^s = \exp(h^*(x_t)\cdot y_t)\exp\left\{-\int_s^t y_\tau^*\cdot\nabla h\cdot\sigma(x_\tau)\mathrm{d}w_\tau\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_s^t(ay_\tau\cdot\nabla h(x_\tau),y_\tau^*\cdot\nabla h(x_\tau))\mathrm{d}\tau\right\}\exp\left(\int_s^t e(\tau,x_\tau)\mathrm{d}\tau\right) \tag{6.2.4}$$

其中

$$e(\tau,x) = \frac{1}{2}(ay_\tau\cdot\nabla h(x),y_\tau^*\cdot\nabla h(x)) - y_\tau^* L_\tau h(x) - \frac{1}{2}|h(x)|^2 \tag{6.2.5}$$

$a=(\sigma\sigma^*)$，$(a\xi,\xi)=|\xi\sigma|^2$ 表示 R^k 中 $a\xi$ 与 ξ 的内积，符号"·"表示 R^k 中的点积。

令

$$\hat{Z}_t^s = \exp\left\{-\int_s^t y_\tau^*\cdot\nabla h(x_\tau)\sigma(x_\tau)\mathrm{d}w_\tau\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_s^t(a(x_\tau,y_\tau)y_\tau\cdot\nabla h(x_\tau),y_\tau^*\cdot\nabla h(x_\tau))\mathrm{d}\tau\right\}$$

当 $s=0$ 时，$y_0=0$，由式(6.2.4)和 $\hat{Z}_t^s$ 的定义得

$$Z_t^0 = \hat{Z}_t^0\exp(h^*(x_t)\cdot y_t)\exp\left(\int_0^t e(\tau,x_\tau)\mathrm{d}\tau\right) \tag{6.2.6}$$

式(6.2.6)中的 Z_t^0 的表达式不依赖于随机积分

$$\int_0^t h^*(x_\tau)\cdot\mathrm{d}y_\tau$$

约定

$$\tilde{g} = g - ay_s\cdot\nabla h$$

$$\tilde{w}_t = w_t + \int_0^t y_s^*\cdot\nabla h(x_s)\sigma(x_s,y_s)\mathrm{d}s$$

则随机微分方程(6.1.1)可写为

$$\mathrm{d}x_t = \tilde{g}(t,x_t)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}\tilde{w}_t$$

用 $\tilde{w}_t$ 来表示 $(\hat{Z}_t^0)^{-1}$，得

$$(\hat{Z}_t^0)^{-1} = \exp\left\{\int_0^t y_\tau^*\cdot\nabla h(x_\tau)\sigma(x_\tau)\mathrm{d}\tilde{w}_\tau\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t (a(x_\tau,y_\tau)y_\tau \cdot \nabla h(x_\tau),y_\tau^* \cdot \nabla h(x_\tau))\mathrm{d}\tau\Big\}$$

式(6.2.3)中的算子 L_u 改变为

$$\hat{L}_u = L_u - (ay_s \cdot \nabla h, \nabla) \tag{6.2.7}$$

对固定的(y,u),在可测空间$(\Omega^1,\mathscr{G}_T^1)$上定义另一个概率测度 $\hat{P}^{y,u}$ 如下:

$$\mathrm{d}\hat{P}^{y,u}/\mathrm{d}\bar{P}^{y,u}|_{\mathscr{G}_t^1} = \hat{Z}_t^\circ \tag{6.2.8}$$

即是

$$\mathrm{d}\hat{P}^{y,u} = \hat{Z}_t^\circ \mathrm{d}\bar{P}^{y,u}$$

这等价于

$$(\hat{Z}_t^\circ)^{-1}\mathrm{d}\hat{P}^{y,u} = \mathrm{d}\bar{P}^{y,u}$$

用式(6.2.6),可把公式(6.2.1)写为

$$\begin{aligned}
&\mathring{E}_u(f(x_t)Z_t^\circ|\mathscr{G}_t^2) = \bar{E}^{y,u}(f(x_t)Z_t^\circ)\\
&= \hat{E}^{y,u}(f(x_t)Z_t^\circ(\hat{Z}_t^\circ)^{-1})\\
&= \hat{E}^{y,u}(f(x_t)\hat{Z}_t^\circ\exp(y_t^* \cdot h(x_t))\exp(\int_0^t e(\tau,x_\tau)\mathrm{d}\tau)(\hat{Z}_t^\circ)^{-1})\\
&= \hat{E}^{y,u}(f(x_t)\exp(y_t^* \cdot h(x_t))\exp(\int_0^t e(\tau,x_\tau)\mathrm{d}\tau))
\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

式(6.2.9)的右端,对一切$(y,u)\in\Omega^2$有定义。对固定的$(y,u)\in\Omega^2$,式(6.2.9)的右端是 $f(\cdot)\in C_b(R^k)$的连续线性泛函。因此,对每一$(y,u)\in\Omega^2$ 和 $t\in[0,T]$,存在一个 Borel σ-域 $\mathscr{B}(R^k)$上的测度 $\Lambda_t^{y,u}$,使得

$$\begin{aligned}
&\hat{E}^{y,u}(f(x_t)\exp(y_t^* \cdot h(x_t))\exp(\int_0^t e(\tau,x_\tau)\mathrm{d}\tau))\\
&= \langle f,\Lambda_t^{y,u}\rangle = \int_{R^k} f(x)\mathrm{d}\Lambda_t^{y,u} \quad \forall f \in C_b(R^k)
\end{aligned} \tag{6.2.10}$$

特别地,取 $f=1\in C_b(R^k)$,则有

$$\begin{aligned}
&\int_{R^k} 1\mathrm{d}\Lambda_t^{y,u} = \Lambda_t^{y,u}(R^k) = \hat{E}^{y,u}(\exp(y_t^* \cdot h(x_t))\exp(\int_0^t e(\tau,x_\tau)\mathrm{d}\tau))\\
&= \mathring{E}_u(Z_t^\circ|\mathscr{G}_t^2)
\end{aligned} \tag{6.2.11}$$

定义 6.2 可测空间$(R^k,\mathscr{B}(R^k))$上的测度$\Lambda_t^{y,u}$称为非正规条件分布测度。

命题 6.3 $\forall\ (y,u)\in\Omega^2, t\in[0,T]$,非正规条件分布测度$\Lambda_t^{y,u}$满足

$$E_\pi(f(x_t)\mid\mathscr{G}_t^2)=\frac{\langle f,\Lambda_t^{y,u}\rangle}{\langle 1,\Lambda_t^{y,u}\rangle}\quad\forall\ f\in C_b(R^k)\qquad(6.2.12)$$

其中E_π表示用式(6.1.13)定义的测度P_π的数学期望。

证 由关系式(6.2.11)得

$$\langle 1,\Lambda_t^{y,u}\rangle E_\pi(f(x_t)\mid\mathscr{G}_t^2)=\mathring{E}_\pi(\mathring{Z}_t\mid\mathscr{G}_t^2)E_\pi(f(x_t)\mid\mathscr{G}_t^2)\qquad(6.2.13)$$

从条件期望的定义和$\mathring{P}_\pi$与P_π的关系式(6.1.13),得

$$\begin{aligned}\int_A\langle f,\Lambda_t^{y,u}\rangle\mathrm{d}\,\mathring{P}_\pi&=\int_A\mathring{E}_\pi(f(x_t)Z_t\mid\mathscr{G}_t^2)\mathrm{d}\,\mathring{P}_\pi\\&=\int_A f(x_t)\mathring{Z}_t\mathrm{d}\mathring{P}_\pi\\&=\int_A f(x_t)\mathring{Z}_t(\mathring{Z}_t)^{-1}\mathrm{d}P_\pi\\&=\int_A f(x_t)\mathrm{d}P_\pi\quad\forall\ A\in\mathscr{G}_t^2\qquad(6.2.14)\end{aligned}$$

条件期望$E_\pi(f(x_t)\mid\mathscr{G}_t^2)$对$\mathscr{G}_t^2$可测,由式(6.2.13),得

$$\begin{aligned}\langle 1,\Lambda_t^{y,u}\rangle E_\pi(f(x_t)\mid\mathscr{G}_t^2)&=\mathring{E}_\pi(\mathring{Z}_t\mid\mathscr{G}_t^2)E_\pi(f(x_t)\mid\mathscr{G}_t^2)\\&=\mathring{E}_\pi\{(\mathring{Z}_tE_\pi(f(x_t)\mid\mathscr{G}_t^2))\mid\mathscr{G}_t^2\}\qquad(6.2.15)\end{aligned}$$

用条件期望的定义和式(6.2.15),有

$$\begin{aligned}\int_A\langle 1,\Lambda_t^{y,u}\rangle E_\pi(f(x_t)\mid\mathscr{G}_t^2)\mathrm{d}\,\mathring{P}_\pi&=\int_A\mathring{E}_\pi\{(\mathring{Z}_tE_\pi(f(x_t)\mid\mathscr{G}_t^2))\mid\mathscr{G}_t^2\}\mathrm{d}\,\mathring{P}_\pi\\&=\int_A\mathring{Z}_tE_\pi(f(x_t)\mid\mathscr{G}_t^2)\mathrm{d}\,\mathring{P}_\pi\\&=\int_A E_\pi(f(x_t)\mid\mathscr{G}_t^2)\mathrm{d}P_\pi\\&=\int_A f(x_t)\mathrm{d}P_\pi\quad\forall\ A\in\mathscr{G}_t^2\qquad(6.2.16)\end{aligned}$$

比较式(6.2.16)和式(6.2.14)得

$$\langle f,\Lambda_t^{y,u}\rangle = \langle 1,\Lambda_t^{y,u}\rangle E_u(f(x_t)\mid\mathscr{G}_t^y)$$ 证毕

对固定的 $t\in[0,T]$，定义函数 $v_t^{y,u}(x)$ 为

$$v_t^{y,u}(x) = \hat{E}_x^{y,u}\{f(x)\exp(y_t^* \cdot h(x_t))\exp(\int_0^t c(s,x_s)\mathrm{d}s)\}$$

(6.2.17)

这里 $\hat{E}_x^{y,u}$ 是对概率测度 $\hat{P}_x^{y,u}$ 取的数学期望，而 $\hat{P}_x^{y,u}$ 的定义，类似于式(6.2.8)的定义，其定义为

$$\mathrm{d}\hat{P}_x^{y,u} = \hat{Z}_t^u \mathrm{d}\overline{P}_x^{y,u}$$

概率分布 $\overline{P}_x^{y,u}$ 是对初始值 $\tilde{x}_0(\omega)=x\in R^k$ 定义的。

对初始状态 $\tilde{x}_0(\omega)$ 的初始分布 μ，有下式

$$\begin{aligned}
\hat{E}^{y,u}(G(X)) &= \int_\Omega G(X)\mathrm{d}\hat{P}^{y,u} = \int_\Omega G(X)\hat{Z}_t^u\mathrm{d}\overline{P}^{y,\mu} \\
&= \int_\Omega G(X)\hat{Z}_t^u\int_{R^k}\mathrm{d}\overline{P}_x^{y,u}\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{R^k}\left(\int_\Omega G(X)\hat{Z}_t^u\mathrm{d}\overline{P}_x^{y,u}\right)\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{R^k}\left(\int_\Omega G(X)\mathrm{d}\hat{P}_x^{y,u}\right)\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{R^k}\hat{E}_x^{y,u}(G(X))\mathrm{d}\mu(x) \qquad (6.2.18)
\end{aligned}$$

由式(6.2.10)、式(6.2.17)和式(6.2.18)，得

$$\langle f,\Lambda_t^{y,u}\rangle = \langle v_t^{y,u},\mu\rangle \quad \forall\ (y,\mu)\in\Omega^2 \quad \forall\ f\in C_b(R^k)$$

(6.2.19)

下面希望考虑相应于任何测度 $\mu>0$，$\mu(R^k)<\infty$ 的 $\Lambda_t^{y,u}$，而不仅是在 $\mathscr{B}(R^k)$ 上的概率测度 μ。给定 (y,u) 和 μ，式(6.2.19)的右端是有界的关于 f 是非负的线性泛函。公式(6.2.17)给出一个不限制 $\mu(R^k)=1$ 的定义 $\Lambda_t^{y,u}$ 的方法，使得式(6.2.19)成立。

引理 6.2 假设 U 是 R^r 中的紧子集，则

(1)用式(6.2.17)定义的 $v_t^{y,u}(x)$ 是 (x,y,u) 的连续函数。

(2)已给 $f\in C_0(R^k)$ 和 $r>0$，存在依赖于 f，r 和 $|g|$，$|\sigma|$，$|\nabla h|$ 的界的正常数 α 和 M，使得

$$|v_t^{y,u}(x)| \leqslant M\exp(-\alpha|x|^2) \quad \forall\ x\in R^k, y, u, \text{只要 } \|y\| \leqslant r$$

证 用引理 6.1，$\hat{P}_x^{y,u}$ 连续地依赖于(x,y,u)。让 $x_n\to x, y_n\to y, u_n\to u(n\to\infty)$。对固定的 t，令

$$\Psi_n(x) = f(x_t)\exp(h^*(x_t)\cdot y_{nt})\exp(\int_0^t e_n(s,x_s)\mathrm{d}s)$$

$$\Psi(x) = f(x_t)\exp(h^*(x_t)\cdot y_t)\exp(\int_0^t e(s,x_s)\mathrm{d}s)$$

其中 $e_n(s,x_s)$表示在关于 $e(s,x_s)$的定义式(6.2.5)中用 y_n, u_n 代替 y,u 得到的表达式。

对任一紧集 $\Gamma\subset C([0,T],R^d)$，

$$\int_0^t e_n(s,x_s)\mathrm{d}s \to \int_0^t e(s,x_s)\mathrm{d}s$$

$(n\to\infty)$在 Γ 上一致地成立。

因此，$\Psi_n\to\Psi(n\to\infty)$在 Γ 上一致地成立。于是有

$$v_0^{y_n,u_n}(x_n) = \hat{E}_{x_n}^{y_n,u_n}(\Psi_n(x_t)) \to \hat{E}_x^{y,u}(\Psi(x_t)) = v_0^{y,u}(x) \quad (n\to\infty)$$

这就证明了(1)。

由假设 U 是紧集，u_t 有界，对 $\|y\|\leqslant r$，$h^*(x_t)\cdot y_t$ 和 $e(s,x_s)$是有界的。因此，存在正常数 c_1，使得

$$|v_0^{y,u}(x)|\leqslant c_1\hat{P}_x^{y,u}(x_t\in \operatorname{supp} f) \qquad (6.2.20)$$

由方程

$$\mathrm{d}x_t = \tilde{g}(t,x_t)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}\tilde{w}_t \quad \hat{P}_x^{y,u} - a.s.$$

和 $\tilde{w}_t$ 是一个 $\hat{P}_x^{y,u}$—Wiener 过程，其中

$$\tilde{g} = g - ay_s\cdot\nabla h$$

$$\tilde{w}_t = w_t + \int_0^t y_s^*\cdot\nabla h(x_s)\sigma(x_s,y_s)\mathrm{d}s$$

当 $\|y\|\leqslant r$ 时，由条件(A_1)和(A_2)的假定知，$\tilde{g}$ 和 σ 都是有界的，所以

$$|x_t - x|\leqslant c_2\|\zeta\| + ct$$

其中

$$\zeta_t = \int_0^t \sigma\mathrm{d}\tilde{w}_s$$

于是存在正常数 k_1 和某个数 k_2，使得

$$\hat{P}_{y}^{y,u}(x_t \in \mathrm{supp}f) \leqslant \hat{P}_{y}^{y,u}(\|\zeta\| > k_1|x| - k_2) \quad (6.2.21)$$

其中 $\|\cdot\|$ 是通常的上模。

用 a 是有界的和一个指数鞅不等式的事实，有

$$\hat{P}_{y}^{y,u}(\|\zeta\| > k_1|x| - k_2) \leqslant M\exp(-\alpha|x|^2) \quad (6.2.22)$$

对某个 $M,\alpha>0$ 成立。

由不等式(6.2.20)、(6.2.21)和式(6.2.22)得(2)的证明。

证毕

对 $r>0$，令

$\mathscr{M}_r=\{\mu \; \mu$ 是 $\mathscr{B}(R^k)$ 上非负测度，$\|\mu\|\leqslant r\}$，其中

$$\|\mu\| = \mu(R^k)$$

测度列 $\{\nu_n\}$ 收敛于测度 ν，是指：

$$\langle f,\nu_n\rangle \to \langle f,\nu\rangle \quad (n\to\infty) \quad \forall f\in C_0(R^k)$$

记为 $\nu_n \Rightarrow \nu$

引理 6.3 当 $\mu\in\mathscr{M}_r$，$(y,u)\in\Omega^2$ 时，$\Lambda_t^{y,u}$ 在 $\mathscr{M}_r\times\Omega^2$ 上是 (μ,y,u) 的连续映射。

证 设 $\mu_n\Rightarrow\mu$，$(y_n,u_n)\to(y,u) \quad (n\to\infty)$。已给 $f\in C_0(R^k)$，记

$$v_n(x) = v_{y_n}^{y_n,u_n}(x)$$

$$v(x) = v_y^{y,u}(x)$$

用式(6.2.19)，只要证明

$$\langle f,\Lambda_t^{y_n,u_n}\mu_n\rangle = \langle v_{y_n}^{y_n,u_n},\mu_n\rangle = \langle v_n,\mu_n\rangle \to \langle v,\mu\rangle$$
$$= \langle f,\Lambda_t^{y,u}\mu\rangle \quad (n\to\infty)$$

即可。

用引理 6.2，"$x_n\to x$"⇒"$v_n(x_n)=v_{y_n}^{y_n,u_n}(x_n)\to v_y^{y,u}(x)=v(x)\;(n\to\infty)$"。用这个事实和 $v(x)$ 的连续性，在 R^k 的紧子集上一致地成立 $v_n\to v(n\to\infty)$。由假设 $\|y_n\|\leqslant r$，$y_n\to y(n\to\infty)$，用引理 6.2 的(2)，$v_n(x)\to 0(|x|\to\infty)$ 关于 n 一致地成立。因为 $\|\mu_n\|\leqslant r$，所以

$$\langle v_n,\mu_n\rangle - \langle v,\mu\rangle = \langle v_n,\mu_n\rangle - \langle v_n,\mu\rangle + \langle v_n,\mu\rangle$$
$$- \langle v,\mu\rangle \to 0(n\to\infty)$$

证毕

§6.3 Zakai 随机微分方程

当$(y,u)\in\Omega^2$时，对每一个t，$M_t^{y,u}$是一个测度。因此，$M_t^{y,u}$是一个测度值的随机过程。这一节将要建立随机过程$M_t^{y,u}$，$t\in[0,T]$满足的随机微分方程，称为 Zakai 随机微分方程。如果测度$M_t^{y,u}$有密度函数，这个密度函数满足的 Zakai 随机微分方程是一个随机偏微分方程。

正则情形 假定当y固定时，g,σ和h属于$C_b^\infty(R^k)$，对固定的$(y,u)\in\Omega^2$，设u_t在$[0,T]$上连续。

已给$t>0$和$f\in C_0^\infty(R^k)$。考虑如下的后向偏微分方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}+\hat{L}_s v+e(s)v=0,s\in[0,t)\tag{6.3.1}$$

$$v(t)=f\exp(y_t^*\cdot h)$$

其中$v(s)=v(s,\cdot)$，$e(s)=e(s,\cdot)$和$\hat{L}_s$用式(6.2.7)定义给出。偏微分方程(6.3.1)的哥西问题有解

$$v(s,x)=\hat{E}_{s,x}^{y,u}\left\{f(x_t)\exp(y_t^*\cdot h(x_t))\exp\left(\int_s^t e(s,x_s)\mathrm{d}s\right)\right\}\tag{6.3.2}$$

其中$\hat{P}_{s,x}^{y,u}$是随机微分方程

$$\mathrm{d}x_t=\hat{g}\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}\hat{w}_t,s<t\leqslant T$$

$$x_s=x\in R^k$$

的解$(\hat{w}_t,x_t)$的分布测度。特别地，$\hat{P}_{0,x}^{y,u}=\hat{P}_x^{y,u}$。用式(6.2.17)，有

$$v(0)=v_0^{y,u}\tag{6.3.3}$$

在上述正则性条件下，$v(s)\in C^\infty(R^k)$，$s\in[0,t]$，$\mathrm{d}v/\mathrm{d}s$连续和式(6.3.1)成立。

类似于引理6.2的证明，v关于$x_1,\cdots,x_k$的任何阶的每一偏导数，当$|x|\to\infty$时，依指数地趋于零。

现在考虑方程(6.3.1)的伴随方程的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\hat{L}_t^* p+e(t)p,t>0\tag{6.3.4}$$

$$p(0) = p_0$$

这里 $p_0(\cdot) \in C_0^\infty(R^k)$。抛物型方程(6.3.4)有唯一解 $p(\cdot) \in C^\infty(R^k)$，并且有关于 $x_1, \cdots, x_k$ 的任何阶所有偏导数，当 $|x| \to \infty$ 时，依指数地趋于零。

用 $(\cdot, \cdot)$ 表示空间 $L^2(R^k)$ 上两个元之间的内积，于是有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v(t), p(t)) &= \left(\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}, p(t)\right) + \left(v(t), \frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}\right) \\ &= -(\hat{L}_t v + c(t)v, p(t)) + (v(t), \hat{L}_t^* p + c(t)p) \\ &= 0\end{aligned}$$

因此得

$$(v(t), p(t)) = \mathrm{const}$$

特别地，有

$$(v(t), p(t)) = (v_0^{y,u}, p_0)$$

如果 $p_0(\cdot)$ 是测度 μ 的密度，则由式(6.2.19)和

$$v(t) = f\exp(y_t^* \cdot h)$$

得

$$\begin{aligned}\langle f, \Lambda_t^{y,u}\rangle &= \langle v_0^{y,u}, \mu\rangle = (v_0^{y,u}, p_0) = (v(t), p(t)) \\ &= \int_{R^k} p(t,x)\exp(y_t^* \cdot h(x))f(x)\mathrm{d}x \qquad (6.3.5)\end{aligned}$$

令

$$q(t,x) = p(t,x)\exp(y_t^* \cdot h(x)) \qquad (6.3.6)$$

当然 $q = q^{y,u}$ 依赖于观测 y 和控制 u。则式(6.3.5)表明 $q(t)$ 是非正规条件分布测度 $\Lambda_t = \Lambda_t^{y,u}$ 的密度函数。在上述正则条件下，偏微分方程(6.3.4)确定 $p(t)$，从而确定测度 $\Lambda_t^{y,u}$ 的密度函数 $q(t)$。

一般情形 现在假定 g, σ 和 h 满足条件(A_1)，(A_2)和(A_3)。考虑固定 $(y,u) \in \Omega^2$ 和任一 $\tilde{x}_0(\omega)$ 的分布 μ。先用弱的形式来重复写方程(6.3.4)。

用关系式

$$\langle g, \hat{\Lambda}_t\rangle = \langle g\exp(-y_t^* \cdot h), \Lambda_t\rangle \quad \forall\, g \in C_b(R^k) \quad (6.3.7)$$

来定义测度 $\hat{\Lambda}_t$。

在正则情形，$\hat{\Lambda}_t$ 有密度 $p(t)$。用 $g\in C_0^\infty(R^k)$乘方程(6.3.4)的两端，然后对 x 在 R^k 上积分，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle g,\hat{\Lambda}_t\rangle=\langle\hat{L}_t g,\hat{\Lambda}_t\rangle+\langle e(t)g,\hat{\Lambda}_t\rangle,g\in C_0^\infty(R^k)\quad(6.3.8)$$

方程(6.3.8)是方程(6.3.4)在弱的形式下的表示。初始值是 $\hat{\Lambda}_0=\mu$。

定理 6.1 方程(6.3.8)对任意的$(y,u)\in\Omega^2$，任意的 $g\in C_0^2(R^k)$和 $\tilde{x}_0$ 的初始分布 μ 成立。

证 对 $g\in C_0^\infty(R^k)$，在正则情形方程(6.3.8)成立。对固定的 y，取 g_n,σ_n 和 $h_n\in C_0^\infty(R^k)$一致有界和 $g_n,\sigma_n,h_{nx_i},h_{nx_ix_j}$ 的任一个是一致有界和在紧集上一致趋于 $g,\sigma,h,h_{x_i},h_{x_ix_j}(n\to\infty)$。此外，偏导数 g_{nx_i}，σ_{nx_i}是一致有界的。并且，让 u_n 在区间$[0,T]$上连续，$u_{nt}\in U$ 和在区间$[0,T]$上几乎处处趋于 u，$\mu_n\Rightarrow\mu$，μ_n 有密度 $p_{0n}\in C_0^\infty(R^k)$。记 $\hat{P}_{nx}=\hat{P}_{nx}^{y,u}$，这里下标“$n$”意思是 g,σ,h 用 g_n,σ_n,h_n 代替。如果 $x_n\to x(n\to\infty)$，用引理 6.1，$\hat{P}_{nx_n}\Rightarrow\hat{P}_x^{y,u}(n\to\infty)$。

设 $f\in C_0^\infty(R^k)$，如对引理 6.2 的(1)相同的证明，可知

$$v_{0n}^{y,u}(x)=\hat{E}_{nx}\{f(x_t)\exp(y_t^*\cdot h(x_t))\exp(\int_0^t e_s(s,x_s)\mathrm{d}s)\}$$

在任一紧子集上一致趋于 $v_0^{y,u}(x)$。

设 Λ_{nt}是相应的非正规条件分布，具有 $\Lambda_{0n}=\mu_n$。用式(6.2.19)有

$$\langle f,\Lambda_{nt}\rangle=\langle v_{0n},\mu_n\rangle$$
$$\langle f,\Lambda_t\rangle=\langle v_0,\mu\rangle$$

这里 $v_0=v_0^{y,u}$。则

$$\langle v_{0n},\mu_n\rangle\to\langle v_0,\mu\rangle(n\to\infty)$$

所以 $\Lambda_{nt}\Rightarrow\Lambda_t(n\to\infty)$。于是$\|\Lambda_{nt}\|$是有界数列，由式(6.3.7)得 $\hat{\Lambda}_{nt}\Rightarrow\hat{\Lambda}_t(n\to\infty)$。从而$\|\hat{\Lambda}_{nt}\|$是有界数列。

在正则情形，用积分形式重写式(6.3.8)为

$$\langle g,\hat{\Lambda}_{nt}\rangle=\langle g,\mu_n\rangle+\int_0^t\langle\hat{L}_{ns}g,\hat{\Lambda}_{ns}\rangle\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t \langle e_n(s)g,\hat{\Lambda}_{n,s}\rangle \mathrm{d}s \tag{6.3.9}$$

对每一$g\in C_0^\infty(R^d)$，$\hat{L}_{n,s}g$，$e_n(s)g$是一致有界的和对几乎一切$s\in[0,T]$，在R^d上一致地趋于$\hat{L}_sg$，$e(s)g$。当$n\to\infty$时，在公式(6.3.9)两端取极限，得方程(6.3.8)对$\forall\ g\in C_0^\infty(R^d)$成立。最后，对$g\in C_b^2(R^d)$，用$g_n\in C_0^\infty(R^d)$逼近$g$，使得$g_n$，$\hat{L}_sg_n$一致地有界和在$R^d$的紧子集上，$g_n$，$\hat{L}_sg_n$一致地趋于$g$，$\hat{L}_sg$，$(n\to\infty)$。用取极限，就知道方程(6.3.8)对$\forall\ g\in C_b^2(R^d)$成立。　　证毕

依§6.1所述，$\{y_t\}$是$\mathring{P}_x$—$\{\mathscr{G}_t^y\}$的Wiener过程。对Λ_t满足下面的由Wiener过程$\{y_t\}$驱动的随机微分方程。

定理6.2　对每一$f\in C_b^2(R^d)$，测度值的随机过程Λ_t满足随机微分方程

$$\mathrm{d}\langle f,\Lambda_t\rangle=\langle L_tf,\Lambda_t\rangle\mathrm{d}t+\langle hf,\Lambda_t\rangle\cdot\mathrm{d}y_t \tag{6.3.10}$$

$$\Lambda_0=\mu$$

随机微分方程(6.3.10)称为Zakai方程。

证　记

$$\psi(t,x)=f(x)\exp(y_t^*\cdot h(x))$$

则由式(6.3.7)得下面的关系式

$$\langle f,\Lambda_t\rangle=\langle\psi(t),\hat{\Lambda}_t\rangle$$

其中$\psi(t)=\psi(t,\cdot)$。

对固定的x，用Itô微分公式，有

$$\mathrm{d}\psi=\frac{1}{2}\psi|h|^2\mathrm{d}t+\psi h\cdot\mathrm{d}y_t$$

对给定的$t>0$，分区间$[0,t]$为长度是tm^{-1}的m个子区间$[t_{j-1},t_j](j=1,\cdots,m)$，$t_0=0$，$t_m=t$。则

$$\langle f,\Lambda_t\rangle-\langle f,\Lambda_0\rangle=\sum_{j=1}^m\langle\psi(t_j),\hat{\Lambda}_{t_j}-\hat{\Lambda}_{t_{j-1}}\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^m\langle\psi(t_j)-\psi(t_{j-1}),\hat{\Lambda}_{t_{j-1}}\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\langle \hat{L}_s\varphi(t_j) + e(s)\varphi(t_j), \hat{\Lambda}_s\rangle \mathrm{d}s$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\langle \psi(s)|h|^2, \hat{\Lambda}_{t_{j-1}}\rangle \mathrm{d}s$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\langle \psi(s)h, \hat{\Lambda}_{t_{j-1}}\rangle \cdot \mathrm{d}y_s \qquad (6.3.11)$$

对固定的(y,u)，有

$$|\langle \psi(s)h, \hat{\Lambda}_s\rangle - \langle \psi(s)h, \hat{\Lambda}_{t_{j-1}}\rangle|$$

$$= \left|\int_{t_{j-1}}^{s}\{\langle \hat{L}_\tau(\psi(s)h), \hat{\Lambda}_\tau\rangle + \langle e(\tau)\psi(s)h, \hat{\Lambda}_\tau\rangle\}\mathrm{d}\tau\right|$$

$$\leqslant c(s - t_{j-1}) \leqslant cTm^{-1} \to 0(m \to \infty)$$

这里 c 是依赖于(y,u)的正常数。因此，式(6.3.11)的右端最后一项

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\langle \psi(s)h, \hat{\Lambda}_{t_{j-1}}\rangle \cdot \mathrm{d}y_s \to \int_0^t\langle \psi(s)h, \hat{\Lambda}_s\rangle \cdot \mathrm{d}y_s,$$

$$\mathring{P}_x - a.s.\ (m \to \infty)$$

由式(6.3.11)，令 $m\to\infty$ 得

$$\langle f, \Lambda_t\rangle - \langle f, \Lambda_0\rangle = \int_0^t\langle \hat{L}_s\varphi(s) + e(s)\varphi(s) + \frac{1}{2}\psi(s)|h|^2, \hat{\Lambda}_s\rangle \mathrm{d}s$$

$$+ \int_0^t\langle \psi(s)h, \hat{\Lambda}_s\rangle \cdot \mathrm{d}y_s \qquad (6.3.12)$$

由式(6.2.3)、(6.2.5)和式(6.2.7)以及 $\varphi(t)$的定义，可得

$$\exp(y_s^* \cdot h)L_s f = \hat{L}_s\varphi(s) + e(s)\varphi + \frac{1}{2}\psi|h|^2 \quad (6.3.13)$$

依 $\hat{\Lambda}_s$ 的定义式(6.3.7)有

$$\langle \exp(y_s^* \cdot h)L_s f, \hat{\Lambda}_s\rangle = \langle L_s f, \Lambda_s\rangle \qquad (6.3.14)$$

$$\langle \psi(s)h, \hat{\Lambda}_s\rangle = \langle \exp(y_s^* \cdot h)hf, \hat{\Lambda}_s\rangle$$

$$= \langle hf, \Lambda_s\rangle \qquad (6.3.15)$$

将式(6.3.14)、(6.3.13)和式(6.3.15)代入式(6.3.12)的右端，得

$$\langle f, \Lambda_t\rangle - \langle f, \mu\rangle = \int_0^t \langle L_s f, \Lambda_s\rangle \mathrm{d}s + \int_0^t \langle hf, \Lambda_s\rangle \cdot \mathrm{d}y_s$$ 证毕

推论 6.1 假定初始状态 $x_0(\omega)$ 的分布 μ 有密度函数 $p_0(x)$，Λ_t 有密度函数 $p(t,x)$，则 $p(t,x)$ 满足随机偏微分方程

$$\mathrm{d}p = L_t^* p \mathrm{d}t + ph \cdot \mathrm{d}y_t \qquad (6.3.16)$$

$$p(0) = p_0(x)$$

其中，L_t^* 是算子 L_t 的伴随算子。

现在可以用 $\Lambda_t^{y,u}$ 来表达性能指标(6.1.3)。在式(6.1.3)中，取 $E=E_\pi$，则

$$\begin{aligned}
J(u) &= E_\pi\left\{\int_0^T f(x_t, u_t)\mathrm{d}t + G(x_T)\right\} \\
&= E_\pi\left\{\int_0^T E_\pi(f(x_t, u_t)\,|\,\mathscr{G}_t^y)\mathrm{d}t \right.\\
&\qquad \left. + E_\pi(G(x_T)\,|\,\mathscr{G}_T^y)\right\} \\
&= E_\pi\left\{\int_0^T \mathring{E}_\pi(\mathring{Z}_t f(x_t, u_t)\,|\,\mathscr{G}_t^y)\mathrm{d}t \right.\\
&\qquad \left. + \mathring{E}_\pi(\mathring{Z}_T G(x_T)\,|\,\mathscr{G}_T^y)\right\} \\
&= E_\pi\left\{\int_0^T \langle f(\cdot, u_t), \Lambda_t^{y,u}\rangle \mathrm{d}t + \langle G(\cdot), \Lambda_T^{y,u}\rangle\right\} \qquad (6.3.17)
\end{aligned}$$

如果 $\Lambda_t^{y,u}$ 具有密度函数 $p^{y,u}(t,x)$，则公式(6.3.17)可写为

$$J(u) = E_\pi\left\{\int_0^T (f(\cdot, u_t), p^{y,u}(t, \cdot))_H \mathrm{d}t + (G(\cdot), p^{y,u}(T, \cdot))_H\right\} \qquad (6.3.18)$$

其中，$(\cdot,\cdot)_H$ 表示空间 $H=L^2(R^n)$ 上的内积。

从上面的讨论，可以看到具有部分观测信息的随机系统的最优控制问题(6.1.1)—(6.1.2)—(6.1.3)，归结为状态是 $\Lambda_t^{y,u}$ 的线性系统(6.3.10)和性能指标为(6.3.17)的最优控制问题，或者在具有密度函数的情形，为系统是(6.3.16)、性能指标为(6.3.18)的最优控制问题。而最优控制问题后者却是具有完全观测信息，状态在动态系统(6.3.16)和性能指标为(6.3.18)中都是线性地出现的

随机偏微分方程的最优控制问题，控制函数出现在 Zakai 随机偏微分方程的算子 L_t^u 的系数中。

§ 6.4 Zakai 随机偏微分方程的解

从前面 § 6.3 的讨论可以知道，当测度值的随机过程 $\Lambda^{g,u}$ 具有概率密度函数 $p^{g,u}(t,x)$ 时，关于 $\Lambda^{g,u}$ 满足的 Zakai 随机方程，就变成 $p^{g,u}(t,x)$ 满足的 Zakai 随机偏微分方程。Zakai 随机偏微分方程，一方面它是偏微分方程，具有偏微分方程的问题：解的存在性、唯一性和解的正则性；另一方面，这个偏微分方程是随机的，它的解是随机过程，该随机过程具有可测性、马尔可夫性。而且 Zakai 随机偏微分方程的解，可以通过相联系的、带有参数的确定性的偏微分方程的解来构造表达出来。本节将对这些问题进行讨论。

假定：

(A_1)　$\sigma(\cdot):R^k\to\mathscr{L}(R^d,R^k)$ 有界一致连续，并且存在正常数 α，使得

$$\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\alpha|\xi|^2\quad\forall x\in R^k,\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_k)\in R^k$$

其中

$$a_{ij}(x)=\frac{1}{2}(\sigma(x)\sigma^*(x))_{ij}\quad(i,j=1,\cdots,k)$$

$\sigma^*(x)$ 表示矩阵 $\sigma(x)$ 的转置矩阵。

(A_2)　$g(\cdot,\cdot):R^k\times U\to R^k$ 连续，$\partial g_j/\partial x_i(i=1,\cdots,k)$ 关于 u 连续，

$g(\cdot,\cdot)\in L^\infty(R^k\times U)$，$\partial g_i/\partial x_i\in L^\infty(R^k\times U)(i=1,\cdots,k)$，

$\partial a_{ij}/\partial x_i\in L^\infty(R^k)$，$\partial^2 a_{ij}/\partial x_i\partial x_j\in L^\infty(R^k)(i,j=1,\cdots,k)$。

(A_3)　$h(\cdot):R^k\to R^m$ 连续，$h(\cdot)\in L^\infty(R^k)\cap W^{2,\infty}(R^k)$，$W^{2,\infty}(R^k)$ 是 Sobolev 空间。

定义算子

$$A=-\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{k}g_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{k}a_i\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (6.4.1)$$

其中

$$a(x)=\frac{1}{2}(\sigma(x)\sigma^*(x))=(a_{ij}(x))$$

$$a_i(x,u)=-g_i(x,u)+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_j}a_{ij}(x) \quad (i=1,\cdots,k)$$

(6.4.2)

$$g(x,u)=(g_1(x,u),\cdots,g_k(x,u))$$

算子 A 的伴随算子 A^* 为

$$A^*=-\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(a_{ij}\,\cdot)+\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_i}(g_i\,\cdot)$$

$$=-\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{k}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \qquad (6.4.3)$$

其中$(a_{ij}\,\cdot)$、$(g_i\,\cdot)$表示当算子 A^* 作用于 f 时，式(6.4.3)的右端用 f 代入"·"的位置后再进行运算。

函数 g_i 和 a_i 都依赖于控制变量 u，因此算子 A,A^* 用 A^u,A^{*u} 表示。

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个概率空间，$\{y_t\}$，$t\in[0,T]$是这个概率空间上的标准的 Wiener 过程。定义 σ-域族$\{\mathscr{F}_t\}$如下

$$\mathscr{F}_t=\sigma(y_s;s\leqslant t),t\in[0,T]$$

把每一个 σ-域 $\mathscr{F}_t$ 完备化后得到一个滤子$\{\mathscr{F}_t\}$，$t\in[0,T]$。

记 $H=L^2(R^k)$，$V=H^1(R^k)$，$V'=H^{-1}(R^k)$，其中，$H^1(R^k)$表示具有一阶广义导数的 Sobolev 空间；V' 表示 V 的强对偶空间。

令

$L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V)=\{z(t)\,|\,z(\cdot)\in L^2((0,T)\times\Omega,\mathrm{d}t\mathrm{d}p,V)$，$z(t)$对 σ-域族$\{\mathscr{F}_t\}$，$t\in[0,T]$是适应过程，a. e. t，$z(t)\in L^2(\Omega,P,V)\}$ (6.4.4)

类似地，可以定义 $L^2_{\mathscr{F}}((0,T),R^r)$，只要在上面的定义中，用 R^r 代替 V 即可。

定义容许控制类

$$U_{ad}=\{u(t)\,|\,u(\cdot)\in L_{\mathscr{Y}}^{2}((0,T),R^{r}),$$
$$u(t)\in U,a.e.\ t\in[0,T],a.s.\}\qquad(6.4.5)$$

假定：

(A_4)　$\forall\ u\in U, f(\cdot,u)\in H, f(x,u)$关于$u$连续，$\forall\ u(\cdot)\in U_{ad}, f(\cdot,u(\cdot))\in L^2((0,T)\times\Omega,\mathrm{d}t\mathrm{d}p,H), G(\cdot)\in H$。

现在定义算子A_0和B^u如下

$$A_0=-\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$B^u=\sum_{i=1}^{k}a_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial a_i(x,u)}{\partial x_i}$$

算子A_0不依赖于控制变量u。

用上面定义的A_0和B^u，Zakai随机偏微分方程(6.3.16)可写为

$$\mathrm{d}p+A_0p\mathrm{d}t=B^{u(\cdot)}p\mathrm{d}t+ph\cdot\mathrm{d}y_t\qquad(6.4.6)$$
$$p(0)=p_0$$

现在考虑在空间V'上的随机微分方程

$$\mathrm{d}\varphi(t)+A\varphi(t)\mathrm{d}t=f(t)\mathrm{d}t+z(t)h\cdot\mathrm{d}y_t\qquad(6.4.7)$$
$$\varphi(0)=\varphi_0\in H$$

的解问题，其中$A\in\mathscr{L}(V,V')$，存在正常数α，使得

$$\langle Au,u\rangle\geqslant\alpha\|u\|^2\quad\forall\ u\in V\qquad(6.4.8)$$

其中，$\|\cdot\|$表示空间V上的范数；$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示空间$V$与$V'$的对偶积，$V^{(m)}=V\times\cdots\times V$($m$个$V$)

引理6.4　在条件(6.4.8)之下，设$z(\cdot)\in L_{\mathscr{Y}}^{2}((0,T),V)$，$f(\cdot)\in L_{\mathscr{Y}}^{2}((0,T),H)$，$h\in V^{(m)}$。则方程(6.4.7)存在唯一解$\varphi(\cdot)\in L_{\mathscr{Y}}^{2}((0,T),V)\cap C([0,T],L^2(\Omega,H))$

证　定义

$$M_t=\int_0^t z(s)h\cdot\mathrm{d}y_s$$

则$M_\cdot\in L_{\mathscr{Y}}^{2}((0,T),V)$

考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} + A\psi = - AM_t + f(t) \qquad (6.4.9)$$

$$\psi(0) = \varphi_0$$

则方程(6.4.9)对每一个 ω,有唯一解 $\psi(\cdot) \in L^2((0,T),V)$。并且解 ψ 对方程(6.4.9)的右端是连续依赖的。所以方程(6.4.9)有一解 ψ 作为在空间 $L^2((0,T),V)$ 中取值的随机元。并且成立

$$|\psi(t)|^2 + 2\int_0^t \langle A\psi(s),\psi(s)\rangle \mathrm{d}s = |\varphi_0|^2 - \int_0^t \langle AM_s,\psi(s)\rangle \mathrm{d}s$$
$$+ \int_0^t (f(s),\psi(s))\mathrm{d}s \qquad (6.4.10)$$

用条件(6.4.8),由式(6.4.10)得

$$|\psi(t)|^2 + 2\alpha\int_0^t \|\psi(s)\|^2\mathrm{d}s \leqslant |\varphi_0|^2 + c_1\varepsilon^{-1}\int_0^t \|M_s\|^2\mathrm{d}s$$
$$+ \varepsilon\int_0^t \|\psi(s)\|^2\mathrm{d}s + \varepsilon^{-1}\int_0^t |f(s)|^2\mathrm{d}s + c_2\varepsilon\int_0^t \|\psi(s)\|^2\mathrm{d}s$$

取 ε 满足条件 $0<\varepsilon<2\alpha(1+c_2)^{-1}$。令 $c_3=2\alpha-\varepsilon(1+c_2)$。由上面的不等式有

$$|\psi(t)|^2 + c_3\int_0^t \|\psi(s)\|^2\mathrm{d}s \leqslant |\varphi_0|^2 + c_1\varepsilon^{-1}\int_0^t \|M_s\|^2\mathrm{d}s$$
$$+ \varepsilon^{-1}\int_0^t |f(s)|^2\mathrm{d}s$$

由此可得

$$\psi(\cdot) \in L_{\mathscr{F}}^2((0,T),V) \cap C([0,T],L^2(\Omega,H))$$

令

$$\varphi(t) = \psi(t) + M_t$$

则

$$\varphi(\cdot) \in L_{\mathscr{F}}^2((0,T),V) \cap C([0,T],L^2(\Omega,H))$$

并且 $\varphi(t)$ 满足方程(6.4.7)。如果方程有两个解 $\varphi_1,\varphi_2 \in L_{\mathscr{F}}^2((0,T),V) \cap C([0,T],L^2(\Omega,H))$。则 $\varphi_3(t)=\varphi_1(t)-\varphi_2(t)$ 满足方程

$$\mathrm{d}\varphi_3(t) + A\varphi_3(t)\mathrm{d}t = 0$$

$$\varphi_3(0) = \varphi_0$$

从上面的方程有

$$E|\varphi_3(t)|^2 + 2E\int_0^t \langle A\varphi_3(s),\varphi_3(s)\rangle \mathrm{d}s = 0 \quad \forall\ s \in [0,T]$$

用条件(6.4.8)，由上面的等式得

$$E|\varphi_3(t)|^2 + 2\alpha E\int_0^t \|\varphi_3(s)\|^2 \mathrm{d}s \leqslant 0 \quad \forall\ t \in [0,T]$$

由此得 $\varphi_3(t)=0$，$a.e.\ t\in[0,T]$，$a.s.$ 因此方程(6.4.7)的解是唯一的。 证毕

随机微分方程(6.4.6)解释为在空间 V' 上的 Itô 微分方程。因此方程(6.4.6)可写为

$$\mathrm{d}(p(t),z) + \langle A_0 p(t),z\rangle = (B^{u(\cdot)}p(t),z)\mathrm{d}t$$
$$+ (p(t)h,z)\cdot \mathrm{d}y_t \quad \forall\ z \in V$$
$$(p(0),z) = (p_0,z)$$

定理 6.3 在条件(A_1)，(A_2)和(A_3)之下，设 $p_0\in H$，则对任意的 $u(\cdot)\in U_{ad}$，方程(6.4.6)存在唯一解

$$p(\cdot) \in L^2_y((0,T),V) \cap L^2(\Omega,\mathscr{F},P,C([0,T],H)) \quad \forall\ T < \infty \qquad (6.4.11)$$

证 作代换，用 pe^{kt}代替 p，算子 A_0 变成(A_0+kI)。对任一 $z(\cdot)\in L^2_y((0,T),V)$，解方程

$$\mathrm{d}\zeta + (A_0 + kI)\zeta \mathrm{d}t = B^{u(\cdot)}z\mathrm{d}t + zh\cdot \mathrm{d}y_t \qquad (6.4.12)$$
$$\zeta(0) = p_0$$

依引理 6.4，方程(6.4.12)存在唯一解 $\zeta(\cdot)\in L^2_y((0,T),V)\cap C([0,T],L^2(\Omega,H))$。要证 $\zeta(\cdot)\in L^2(\Omega,P,C([0,T],H))$。事实上，$zh_i\in L^2_y((0,T),V)(i=1,2,\cdots,m)$，$h(\cdot)=(h_1(\cdot),\cdots,h_m(\cdot))$，

$$\int_0^t zh\cdot \mathrm{d}y_s \in L^2(\Omega,P,C([0,T],H))$$

约定

$$\hat{\zeta}(t) = \zeta(t) - \int_0^t z(s)h\cdot \mathrm{d}y_s \qquad (6.4.13)$$

则方程(6.4.12)可写成

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\zeta}}{\mathrm{d}t} + (A_0 + kI)\zeta = B^{u(\cdot)}z$$

$$\hat{\xi}(0) = p_0$$

用 $\hat{\xi}(t)$ 的定义和上式，得

$$\hat{\xi}(\cdot) \in L^2(\Omega, P, L^2((0,T), V))$$

$$\mathrm{d}\hat{\xi}(\cdot)/\mathrm{d}t \in L^2(\Omega, P, L^2((0,T), V'))$$

由插值定理得

$$\hat{\xi}(\cdot) \in L^2(\Omega, P, C([0,T], H))$$

从这个事实和式(6.4.13)，得

$$\xi(\cdot) \in L^2(\Omega, P, C([0,T], H))$$

依上所述，我们定义了一个从空间 $L_{\mathcal{F}}^2((0,T),V)$ 到 $L_{\mathcal{F}}^2((0,T),V)$ 的一个映射：$z(\cdot) \to \xi(\cdot)$。下面要证明这个映射是一个压缩映射。事实上，取 $p_0=0$，方程(6.4.12)的解满足能量等式

$$E|\xi(T)|^2 + 2E\int_0^T \langle A_0\xi(s), \xi(s)\rangle \mathrm{d}s + 2kE\int_0^T |\xi(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$= 2E\int_0^T (Bz(s), z(s))\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^m \int_0^T E|zh_i|^2 \mathrm{d}s \qquad (6.4.14)$$

由算子 B^* 的定义和空间 V 的范数较空间 H 的范数强，因此有正常数 c_0 使得

$$E\int_0^T |Bz(s)|_H^2 \mathrm{d}s \leqslant c_0 E\int_0^T \| z(s) \|^2 \mathrm{d}s \qquad (6.4.15)$$

用算子 A_0 的定义、由式(6.4.14)和式(6.4.15)得

$$E\int_0^T |\nabla \xi(s)|^2 \mathrm{d}s + (2k-\varepsilon)2^{-1}E\int_0^T |\xi(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$\leqslant c_0(2\varepsilon)^{-1}E\int_0^T |\nabla z(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$+ (c_0\varepsilon^{-1} + c_1)\theta(2\theta)^{-1}E\int_0^T |z(s)|^2 \mathrm{d}s \qquad (6.4.16)$$

其中 ∇ 为梯度算符。

选择 $\varepsilon>0$，使得 $0<c_0(2\varepsilon)^{-1}=\theta<1$，再取 $k>0$ 适当大，使得 $(2k-\varepsilon)2^{-1}=d>0$ 和 $d \geqslant (c_0\varepsilon^{-1}+c_1)(2\theta)^{-1}$。如此选定 ε 和 k 后，由不等式(6.4.16)，得

$$E\int_0^T |\nabla \xi(s)|^2 \mathrm{d}s + dE\int_0^T |\xi(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$\leqslant \theta\left\{E\int_0^T |\nabla z(s)|^2 ds + dE\int_0^T |z(s)|^2 ds\right\} \quad (6.4.17)$$

定义

$$|||\zeta|||^2 = |\nabla \zeta|^2 + d|\zeta|^2$$

由上面的定义，$\min(1,d)\|\zeta\|^2 \leqslant |||\zeta|||^2 \leqslant \max(1,d)\|\zeta\|^2$。这就是说，空间 V 中的范数 $|||\cdot|||$ 与范数 $\|\cdot\|$ 等价。因此，不等式(6.4.17)可写为

$$E\int_0^T |||\zeta(s)|||^2 ds \leqslant \theta E\int_0^T |||z(s)|||^2 ds \quad 0 < \theta < 1$$

因此，映射 $z(\cdot) \to \zeta(\cdot)$ 是空间 $L_F^2((0,T),V)$ 中的压缩映射，从而存在唯一不动点。这等价于方程(6.4.6)在空间(6.4.11)中存在唯一解。 证毕

从算子 B^* 的定义和用分部积分，对 $\forall\ \varphi \in H^1(R^k)$，有

$$(B^*\varphi,\varphi) = \frac{1}{2}\int_{R^k} \varphi^2(x)\sum_{i=1}^k \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i} dx$$

约定

$$\hat{a}(x,u) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial a_i(x,u)}{\partial x_i} + |h(x)|^2 \quad (6.4.18)$$

其中 $|h(x)|$ 表示向量值函数的欧几里得范数。

对于方程(6.4.6)的解的能量等式为

$$E|p(T)|^2 + 2E\int_0^T \langle A_0 p(t), p(t)\rangle dt$$
$$= E\int_0^T\int_{R^k} \hat{a}(x,u(t))p^2(t,x)dxdt + |p_0|^2 \quad (6.4.19)$$

或者

$$e^{-2rT}E|p(T)|^2 + 2E\int_0^T e^{-2rt}\langle A_0 p(t), p(t)\rangle dt$$
$$+ E\int_0^T\int_{R^k}(2r - \hat{a}(x,u(t)))p^2(t,x)e^{-2rt}dxdt$$
$$= |p_0|^2 \quad (6.4.20)$$

选择 $r>0$，使得 $\hat{a}(x,u) \leqslant 2r$ 和

$$E\int_0^\infty e^{-2rt}\|p(t)\|^2 dt < \infty \quad (6.4.21)$$

下面考虑常值控制 $u(\cdot)=u\in U$ 的情形。用 $p^u(t,p_0)$表示方程(6.4.6)的依赖于控制 u 和初始值 p_0 的解。映射

$$p_0 \to p^u(t,p_0) \in \mathscr{L}(H,L^2(\Omega,H)),\forall\ t \geqslant 0 \qquad (6.4.22)$$

是从空间 H 到空间 $L^2(\Omega,P,H)$的有界线性算子。由式(6.4.20)有

$$E|p^u(t,p_0)|^2 \leqslant e^{2\gamma t}|p_0|^2 \qquad (6.4.23)$$

现在考虑用下面的哥西问题的解来定义空间 H 上的线性算子半群$\{T^u(t)\}$,$t\geqslant 0$:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + (A_0 - B^u)z = 0$$

$$z(0) = p_0$$

$$z(t) = T^u(t)p_0,\forall\ t \geqslant 0 \qquad (6.4.24)$$

引理 6.5 对任一常值控制 $u(\cdot)=u\in U$,下面的式成立

$$p^u(t,p_0) = T^u(t)p_0 + \int_0^t T^u(t-s)(p^u(s,p_0)h)\cdot \mathrm{d}y_s$$

$$(6.4.25)$$

证 在式(6.4.25)中,$p^u(t,p_0)h_i(i=1,\cdots,m)$考虑成空间 H 中的元。考虑下面逆向的确定性的哥西问题

$$-\frac{\partial\psi}{\partial s} + (A_0 - B^{*u})\psi = 0 \quad s < t \qquad (6.4.26)$$

$$\psi(t) = \psi \in H$$

哥西问题(6.4.26)的解可以表示为

$$\psi(s) = T^{*u}(t-s)\psi,s \leqslant t$$

由方程(6.4.6)和(6.4.26),有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\psi(s),p^u(s)) &= (\mathrm{d}\psi(s),p^u(s)) + (\psi(s),\mathrm{d}p^u(s)) \\
&= ((A_0 - B^{*u})\psi(s),p^u(s))\mathrm{d}s \\
&\quad + (\psi(s),(-A_0 + B^u)p^u(s)\mathrm{d}s + p^u(s)h\cdot \mathrm{d}y_s) \\
&= (\psi(s),p^u(s)h)\cdot \mathrm{d}y_s
\end{aligned}$$

对上式两端从 0 到 t 积分得

$$\begin{aligned}
(\psi,p^u(t)) &= (\psi(0),p_0) + \int_0^t (\psi(s),p^u(s)h)\cdot \mathrm{d}y_s \\
&= (T^{*u}(t),p_0) + \int_0^t (T^{*u}(t-s)\psi,p^u(s)h)\cdot \mathrm{d}y_s
\end{aligned}$$

$$=(\psi,T^{*}(t)p_0)+\int_0^t(\psi,T^{*}(t-s)(p^{*}(s)h))\cdot \mathrm{d}y_s$$

$\forall\ \psi\in H$。

因此公式(6.4.25)成立。 证毕

考虑方程(6.4.25)为一个线性积分方程，对固定 T，它的解 $p(\cdot)\in C([0,T],L^2(\Omega,H))$是唯一的。事实上，取 $p_0=0$，得估计式

$$E|p(t)|^2\leqslant cE\int_0^t|p(s)|^2\mathrm{d}s$$

由此得 $p(t)=0$，a.e. $t\in[0,T]$，a.s.。这就证明了唯一性。

定义 σ-域族$\{\hat{\mathscr{F}}_s\}$和过程 $y_s(\theta)$如下：

$$\hat{\mathscr{F}}_s=\mathscr{F}_{s+\theta}$$

$$y_s(\theta)=y_{s+\theta}-y_\theta$$

则 $y_s(\theta)$关于 σ-域族$\{\hat{\mathscr{F}}_s\}$是一个 Wiener 过程。并且 $y_s(\theta)$与 σ-域 $\mathscr{F}_\theta$ 独立。

类似于积分方程(6.4.25)，考虑如下的积分方程

$$q_v(t)=T(t)v+\int_0^t T(t-s)(q_v(s)h)\cdot \mathrm{d}y_s(\theta)\quad(6.4.27)$$

这个积分方程有唯一解 $q_v(\cdot)\in C([0,T],L^2(\Omega,H))$，并且

(1)随机变元 $q_v(t,\omega)$取值于 H，与 $\mathscr{F}_\theta$ 独立。

(2)$q_v(t,\omega)$是关于 σ-域 $\mathscr{F}_{t+\theta}$可测的。

现在可以从方程(6.4.25)和半群的性质得

$$\begin{aligned}p_{p_0}(t+\theta)&=T(t+\theta)p_0+\int_0^{t+\theta}T(t+\theta-s)(p(s)h)\cdot \mathrm{d}y_s\\&=T(t)T(\theta)p_0+T(t)\int_0^\theta T(\theta-s)(p(s)h)\cdot \mathrm{d}y_s\\&\quad+\int_\theta^{t+\theta}T(t+\theta-s)(p(s)h)\cdot \mathrm{d}y_s\\&=T(t)p_{p_0}(\theta)+\int_\theta^{t+\theta}T(t+\theta-s)(p(s)h)\cdot \mathrm{d}y_s\\&=T(t)p_{p_0}(\theta)+\int_0^t T(t-s)(p_{p_0}(s+\theta)h)\cdot \mathrm{d}y_s(\theta)\end{aligned}$$

此等式表明，$p_{p_0}(t+\theta)$是积分方程(6.4.27)的具有初值为 $v=$

$p_{r_0}(\theta)$的解。用解的唯一性，有

$$p_{r_0}(t+\theta)=q_{r_0(\theta)}(t) \tag{6.4.28}$$

定理 6.4 设 $\psi(x)$是空间 H 上的任一连续有界泛函，则

(1) $$E(\psi(p^x_{r_0}(t+\theta))|\mathscr{F}_\theta)=\{E\psi(p^x_v(t))|_{v=p_{r_0}(\theta)}\} \tag{6.4.29}$$

(2)过程 $p^x_{r_0}(t)$是取值于 H 的马尔可夫过程。

证 对固定 v，$q_v(t)$与 $\mathscr{F}_\theta$ 独立，$p_{r_0}(\theta)$对 $\mathscr{F}_\theta$ 可测。由式(6.4.28)和实值随机变量的条件期望的结果，有

$$E(\psi(p^x_{r_0}(t+\theta))|\mathscr{F}_\theta)=(E\psi(q^x_v(t)))|_{v=p_{r_0}(\theta)} \tag{6.4.30}$$

但是

$$E\psi(q^x_v(t))=E\psi(p^x_v(t)) \tag{6.4.31}$$

由式(6.4.30)和式(6.4.31)得式(6.4.29)。这就证明了定理的结论(1)。

约定 σ-域如下：

$$P_\theta=\sigma(p^x_{r_0}(s);s\leqslant\theta)$$

从 σ-域 P_θ 与 $\mathscr{F}_\theta$ 的定义知道 $P_\theta\subseteq\mathscr{F}_\theta$。从条件期望的定义与式(6.4.29)，有

$$\begin{aligned}E(\psi(p_{r_0}(t+\theta))|P_\theta)&=E(E(\psi(p_{r_0}(t+\theta))|\mathscr{F}_\theta),P_\theta)\\&=E((E(\psi(q_v(t)))_{v=p_{r_0}(\theta)})|P_\theta)\\&=E(\psi(q_v(t))|_{v=p_{r_0}(\theta)})\end{aligned}$$

$$(\text{因为 } p_{r_0}(\theta) \text{ 对 } P_\theta \text{ 可测}) \tag{6.4.32}$$

另一方面，有

$$\begin{aligned}E(\psi(p_{r_0}(t+\theta))|p_{r_0}(\theta))&=E(E(\psi(p_{r_0}(t+\theta))|\mathscr{F}_\theta)|p_{r_0}(\theta))\\&=E(\psi(q_v(t))|_{v=p_{r_0}(\theta)})\end{aligned} \tag{6.4.33}$$

比较式(6.4.32)与式(6.4.33)，得

$$E(\psi(p_{r_0}(t+\theta))|P_\theta)=E(\psi(p_{r_0}(t+\theta))|p_{r_0}(\theta))$$

这个等式表明过程 $p^x_{r_0}(t)$是取值于空间 H 的马尔可夫过程。证毕

定理 6.5 在(A_1)、(A_2)和(A_3)的条件下，如果 $s\geqslant0$，$\beta(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((s,T),V)\cap C([s,T],L^2(\Omega,H))$是 Zakai 方程

$$d\beta + A_0\beta dt = B^{u(\cdot)}\beta dt + \beta h \cdot dy_t, t \in (s,T] \quad (6.4.34)$$

$$\beta(s) = \beta_s \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_s, P, H)$$

的解，则

$$\theta(t,x) = \beta(t,x)\exp(-y_t^* \cdot h(x)) \quad (6.4.35)$$

是带参数 ω 的确定性的抛物型偏微分方程

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + A_0\theta + \frac{|h|^2}{2}\theta = B^{u(\cdot)}\theta, s < t \leqslant T \quad (6.4.36)$$

$$\theta(s,x) = \beta_s(x)\exp(-y_s^* \cdot h(x)) \quad (6.4.37)$$

的解。

反之，如果 $\theta(t,x)$是偏微分方程(6.4.36)—(6.4.37)的解，$\theta \in L^2((s,T),V), \partial\theta/\partial t \in L^2((s,T),V')$，$a.s.$。则用式

$$\beta(t,x) = \theta(t,x)\exp(y_t^* \cdot h(x)) \quad (6.4.38)$$

定义的 $\beta(t,x)$是 Zakai 方程(6.4.34)的解。

证 设 $\beta(\cdot) \in L_F^2((s,T),V) \cap C([s,T],L^2(\Omega,H))$是 Zakai 方程(6.4.34)的解。Wiener 过程 y_t 可写为

$$dy_t = 0 \cdot dt + 1 \cdot dy_t$$

用 Itô 公式，有

$$d(e^{-y_t^* \cdot h}) = \frac{|h|^2}{2}e^{-y_t^* \cdot h}dt - e^{-y_t^* \cdot h}h \cdot dy_t \quad (6.4.39)$$

用 $\theta(t)$与 $\beta(t)$的关系式(6.4.35)和 Itô 公式，得

$$\begin{aligned} d\theta &= \beta d(e^{-y_t^* \cdot h}) + e^{-y_t^* \cdot h}d\beta + d\beta de^{-y_t^* \cdot h} \\ &= \beta\left(\frac{|h|^2}{2}e^{-y_t^* \cdot h}dt - e^{-y_t^* \cdot h}h \cdot dy_t\right) \\ &\quad + e^{-y_t^* \cdot h}((-A_0 + B^{u(\cdot)})\beta dt + \beta h \cdot dy_t) \\ &\quad - \beta|h|^2 e^{-y_t^* \cdot h}dt \\ &= \left(-\frac{|h|^2}{2} - A_0 + B^{u(\cdot)}\right)\beta e^{-y_t^* \cdot h}dt \\ &= \left(-\frac{|h|^2}{2} - A_0 + B^{u(\cdot)}\right)\theta dt \end{aligned}$$

因此，$\theta(t,x)$满足偏微分方程(6.4.36)和(6.4.37)。

反之，依定理 6.3，Zakai 方程(6.4.34)的解是唯一的，抛物型

方程(6.4.36)的解满足初始条件(6.4.37)也是唯一的。因此,如果 $\theta(t,x)$ 是偏微分方程(6.4.36)和(6.4.37)的解,则用式(6.4.38)定义的 $\beta(t,x)$ 是 Zakai 方程(6.4.34)的解。 证毕

定理 6.6 在(A_1),(A_2)和(A_3)的条件下,还设

$$\partial a_{ij}(x)/\partial x_l \in L^{\infty}(R^k)(l=1,\cdots,k;i,j=1,2,\cdots,k)$$

和在方程(6.4.34)的初始值 $\beta_s \in L^2(\Omega,\mathscr{F}_s,P,V)$。则方程(6.4.34)的解 $\beta(\cdot)$ 满足条件

$$\beta(\cdot) \in L^2((s,T),L^2(\Omega,H^2(R^k))) \cap L^2(\Omega,C([s,T],V)) \tag{6.4.40}$$

并且,如果 $\beta_s \in L^2(\Omega,\mathscr{F}_s,P,V')$,则方程(6.4.34)有唯一解

$$\beta(\cdot) \in L^2_{\mathscr{F}}((s,T),H) \cap C([s,T],L^2(\Omega,V'))$$

证 先证定理的第一部分。约定

$$\beta^l = \partial\beta/\partial x_l \quad (l=1,\cdots,k)$$

则 β^l 是方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\beta^l + A_0\beta^l\,\mathrm{d}t = &\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}\frac{\partial\beta}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}t + B^{u(\cdot)}\beta^l\,\mathrm{d}t\\ &+\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_l}(x,u(t))\beta\right)\mathrm{d}t + \beta^l h\cdot\mathrm{d}y_t + \beta\frac{\partial h}{\partial x_l}\cdot\mathrm{d}y_t\end{aligned} \tag{6.4.41}$$

$$\beta^l(s) = \partial\beta_s/\partial x_l$$

的解。

类似于定理 6.3 的证明,方程(6.4.41)存在唯一解

$$\beta^l(\cdot) \in L^2_{\mathscr{F}}((s,T),V) \cap L^2(\Omega,C([s,T],H))$$

并且能量不等式成立:

$$\begin{aligned}&Ee^{-2rt}|\beta^l(t)|^2 + 2E\int_0^t e^{-2r\tau}\langle A_0\beta^l(\tau),\beta^l(\tau)\rangle\mathrm{d}\tau\\ &+E\int_s^t\int_{R^k}\left(2r-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial a_i(x,u(t))}{\partial x_i}\right)(\beta^l(\tau))^2e^{-2r\tau}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\ &=E\int_s^t\int_{R^k}|\beta^l h+\beta h_{x_l}|^2e^{-2r\tau}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{k}E\int_s^t\int_{R^k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial \beta'}{\partial x_i}\frac{\partial \beta}{\partial x_j}e^{-2r\tau}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \quad \forall\, t\in[s,T]$$

从这个能量等式容易得式(6.4.40)

让 $\phi(t)$是发展方程

$$\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}-A_0\phi=0,t\in(s,T] \tag{6.4.42}$$

$$\phi(s)=\beta_s$$

的解，$\beta(t)$是方程(6.4.34)的解。令 $\hat{\beta}(t)=\beta(t)-\phi(t)$，则 $\hat{\beta}(t)$是方程

$$\mathrm{d}\hat{\beta}+A_0\hat{\beta}\mathrm{d}t=B^{u(\cdot)}\hat{\beta}\mathrm{d}t+\hat{\beta}h\cdot\mathrm{d}y_t+B^{u(\cdot)}\phi\mathrm{d}t+\phi h\cdot\mathrm{d}y_t \tag{6.4.43}$$

$$\hat{\beta}(0)=0$$

$$\hat{\beta}(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((s,T),V)\cap C([s,T],L^2(\Omega,H))$$

的解。并且下面的能量等式成立：

$$\begin{aligned}&Ee^{-2rt}|\hat{\beta}(t)|^2+2E\int_s^t e^{-2r\tau}\langle A_0\hat{\beta}(\tau),\hat{\beta}(\tau)\rangle\mathrm{d}\tau\\&+E\int_s^t\int_{R^k}(2r-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,u(t))(e^{-2r\tau}\hat{\beta}(\tau))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\&=E\int_s^t\int_{R^k}|\hat{\beta}+\phi|^2|h|^2e^{-2r\tau}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\&-E\int_s^t\int_{R^k}\sum_{i=1}^{k}a_i(x,u(t))\phi\frac{\partial\hat{\beta}}{\partial x_i}e^{-2r\tau}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{6.4.44}$$

如果 $\beta_s\in L^2(\Omega,\mathscr{F}_s,V')$，方程(6.4.42)有唯一解

$$\phi(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),H)\cap C([0,T],L^2(\Omega,V'))$$

从这个事实和能量等式(6.4.44)知道定理的第二部分结论成立。

证毕

§6.5 变 分 方 程

在讨论变分方程之前，先证明两个引理。

引理 6.6 设 $\phi(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),H)$，$E=L^2(\Omega,P,H)$，作为矢

值函数 $\phi(t)=\phi(t,\cdot)\in E$。则 $\phi(t)$是定义在区间$[0,T]$上在 E 中取值的 Bochner 可积的，并且

$$\left((B)\int_0^T\phi(s)\mathrm{d}s\right)(\omega) = \int_0^T\phi(s,\omega)\mathrm{d}s, a.s.$$

证　令

$$\phi_n(t,\omega) = \begin{cases}\phi(t,n) & ,\quad 当\ \|\phi(t,\omega)\| \leqslant n \\ 0 & ,\quad 当\ \|\phi(t,\omega)\| > n\end{cases}$$

则

$$E\int_0^T \|\phi_n(s,\omega) - \phi(s,\omega)\|^2\mathrm{d}s \to 0 \quad (n\to\infty)$$

所以只需要对有界的 $\phi(\cdot)\in L_F^2((0,T),H)$来证明引理即可。

现在假定 $\phi(\cdot)\in L_F^2((0,T),H)$是有界的。令

$$\phi_n(t) = 2^n\int_{t-2^{-n}}^t\phi(s)\mathrm{d}s$$

约定 $\phi(s)=\phi(0)$，当 $s\leqslant 0$，则

$$E\int_0^T \|\phi_n(t) - \phi(t)\|^2\mathrm{d}t \to 0 \quad (n\to\infty)$$

因此，只需要对有界连续的 $\phi(\cdot)\in L_F^2((0,T),H)$来证明引理即可。

设 $\phi(\cdot)\in L_F^2((0,T),H)$是有界连续的。令

$$\phi_n(t) = \phi(k2^{-n}),当\ t\in[k2^{-n},(k+1)2^{-n}]\cap[0,T]$$

$(k=0,1,\cdots,)$

则

$$E\int_0^T \|\phi_n(t) - \phi(t)\|^2\mathrm{d}t \to 0 \quad (n\to\infty)$$

其中 $\phi_n(\cdot):[0,T]\to E$ 是阶段函数。

于是存在列$\{\phi_n(\cdot)\}$的子列，仍记为$\{\phi_n(t)\}$，使得

$$\int_0^T \|\phi_n(t) - \phi(t)\|^2\mathrm{d}t \to 0 \quad (n\to\infty), a.s.$$

由假定得

$$\int_0^T \|\phi(t)\|_E\mathrm{d}t = \left(\int_0^T(E|\phi(t)|^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right)$$

$$\leqslant T^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T E|\phi(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty。$$

因此,$\phi(t)$是取值于 E 的 Bochner 可积的,并且

$$\left((B)\int_0^T \phi(t)dt\right)(\omega) = \lim_{n\to\infty}\left((B)\int_0^T \phi_n(t)dt\right)(\omega)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^T \phi_n(t,\omega)dt = \int_0^T \phi(t,\omega)dt, a.s.$$ 证毕

对于状态方程(6.4.6),用 $pe^{\beta t}(\beta>0)$代替 p,则方程(6.4.6)变成

$$dp(t) + Ap(t)dt = B^{u(\cdot)}p(t)dt + p(t)h \cdot dy_t \qquad (6.5.1)$$

$$p(0) = p_0$$

其中 $A=A_0+\beta I$。

定义算子 $\hat{A}\in\mathscr{L}(V,V')$如下:

$$\langle\hat{A}\varphi_1,\varphi_2\rangle = \sum_{i,j=1}^{k}\int_{R^k} a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}dx + \beta\int_{R^k}\varphi_1\varphi_2 dx$$

$$\forall\ \varphi_1,\varphi_2\in V$$

则 $-\hat{A}$ 在空间 H 中生成解析半群$\{e^{-t\hat{A}}\},t\geqslant 0$。

对于任意的 $u^*(\cdot),v(\cdot)\in U_{ad}$,考虑状态方程(6.5.1)的变分方程

$$dz(t) + Az(t)dt = B^{u^*(\cdot)}z(t)dt + (B^{v(\cdot)} - B^{u^*(\cdot)})p^{u^*(\cdot)}(t)dt$$
$$+ z(t)h \cdot dy_t \qquad (6.5.2)$$

$$z(0) = 0$$

其中 $p^{u^*(\cdot)}(t)$是状态方程(6.5.1)的相应于 $u^*(t)$的解。

变分方程(6.5.2)是一个线性随机方程,存在唯一解记为 $z(t)=z(t,v)$,并且解 $z(t)$属于下面的空间

$$z(\cdot)\in L^2(\Omega,C([0,T],H))\cap L_y^2((0,T),V)$$

引理 6.7 在(A_1),(A_2)和(A_3)的假定下,则 $p^{u(\cdot)}(t)$是方程(6.5.1)的解必须且只须 $p(t)=p^{u(\cdot)}(t)$是积分方程

$$p(t) = e^{-t\hat{A}}p_0 + \int_0^t e^{-(t-s)\hat{A}}B^{u(\cdot)}p(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)\hat{A}}p(s)h \cdot dy_s$$

(6.5.3)

的解。

证　必要性　设 $p(t)$ 是方程(6.5.1)的解。考虑确定性的发展方程

$$-\frac{d\psi}{ds}+A^*\psi=0, s<t$$

$$\psi(t)=\bar{\psi}\in H$$

的解　$\psi(s)=e^{-(t-s)A^*}\bar{\psi}$。则

$$\begin{aligned}d(\psi(s),p(s))&=(d\psi(s),p(s))+(\psi(s),dp(s))\\&=(A^*\psi(s),p(s))ds+(\psi(s),(-A_0+B^{u(\cdot)})p(s)ds)\\&\quad+(\psi(s),p(s)h\cdot dy_s)\\&=(\psi(s),B^{u(\cdot)}p(s))ds+(\psi(s),p(s)h)\cdot dy_s\end{aligned}$$

对上式两端从 0 到 t 积分，得

$$(\psi(t),p(t))=(\psi(0),p(0))+\int_0^t(\psi(s),B^{u(\cdot)}p(s))ds+\int_0^t(\psi(s),ph)\cdot dy_s$$

将 $\psi(s)=e^{-(t-s)\hat{A}^*}\bar{\psi}$ 代入上式右端，得

$$\begin{aligned}(\bar{\psi},p(t))&=(\bar{\psi},e^{-t\hat{A}}p_0)+\int_0^t(\bar{\psi},e^{-(t-s)\hat{A}}B^{u(\cdot)}p(s)\\&\quad+e^{-(t-s)\hat{A}}ph\cdot dy_s)\\&=(\bar{\psi},e^{-t\hat{A}}p_0+\int_0^t e^{-(t-s)\hat{A}}B^{u(\cdot)}p(s)\\&\quad+\int_0^t e^{-(t-s)\hat{A}}p(s)h\cdot dy_s)\end{aligned}$$

$\forall\ \bar{\psi}\in H$。

因此 $p(t)$ 满足方程(6.5.3)。

充分性　设 $p(t)$ 满足方程(6.5.3)，要证 $p(t)$ 满足方程

$$p(t)+\int_0^t Ap(s)ds=p_0+\int_0^t B^{u(\cdot)}p(s)ds+\int_0^t p(s)h\cdot dy_s$$

对 $\forall\ z\in D(\hat{A}^*)$，在方程(6.5.3)的两端用 z 取内积得

$$(z,p(t))=(z,e^{-t\hat{A}}p_0)+\int_0^t(e^{-(t-s)\hat{A}^*}z,B^{u(\cdot)}p(s))ds$$

$$+\int_0^t (e^{-(t-s)\hat{A}^*} z, ph \cdot \mathrm{d}y_s) \tag{6.5.4}$$

用线性算子半群的可微性性质，有

$$-\int_0^t \hat{A}^* e^{-s\hat{A}^*} z \mathrm{d}s = -\int_0^t e^{-s\hat{A}^*} A^* z \mathrm{d}s$$

$$= e^{-t\hat{A}^*} z - z \quad \forall z \in D(\hat{A}^*) \tag{6.5.5}$$

对任一 $z \in D(\hat{A}^*)$，用方程(6.5.3)和式(6.5.5)，有

$$(z, p_0) + \int_0^t (-\hat{A}^* z, p(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (z, B^{u(\cdot)} p(s))\mathrm{d}s$$

$$+ \int_0^t (z, ph \cdot \mathrm{d}y_s)$$

$$= (z, p_0) + \int_0^t (-\hat{A}^* z, e^{-s\hat{A}} p_0)\mathrm{d}s$$

$$+ \int_0^t (-\hat{A}^* z, \int_0^s e^{-(s-\tau)\hat{A}} B^{u(\cdot)} p(\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s$$

$$+ \int_0^t (-\hat{A}^* z, \int_0^s e^{-(s-\tau)\hat{A}} p(\tau) h \cdot \mathrm{d}y_\tau) + \int_0^t (z, B^{u(\cdot)} p(s))\mathrm{d}s$$

$$+ \int_0^t (z, p(s) h \cdot \mathrm{d}y_s)$$

$$= (e^{-t\hat{A}^*} z, p_0) + \int_0^t \int_\tau^t (-\hat{A}^* z, e^{-(s-\tau)\hat{A}} B^{u(\cdot)} p(\tau))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau$$

$$+ \int_0^t \int_\tau^t (-\hat{A}^* z, e^{-(s-\tau)\hat{A}} p(\tau) h)\mathrm{d}s\mathrm{d}y_\tau + \int_0^t (z, ph \cdot \mathrm{d}y_s)$$

$$+ \int_0^t (z, B^{u(\cdot)} p(s))\mathrm{d}s$$

$$= (e^{t\hat{A}^*} z, p_0) + \int_0^t (-\int_\tau^t e^{-(s-\tau)\hat{A}^*} A^* z \mathrm{d}s, B^{u(\cdot)} p(\tau))\mathrm{d}\tau$$

$$+ \int_0^t (-\int_\tau^t e^{-(s-\tau)\hat{A}^*} \hat{A}^* z \mathrm{d}s, p(\tau) h \cdot \mathrm{d}y_\tau) + \int_0^t (z, ph \cdot \mathrm{d}y_s)$$

$$+ \int_0^t (z, B^{u(\cdot)} p(s))\mathrm{d}s$$

$$= (z, e^{-t\hat{A}} p_0) + \int_0^t (e^{-(t-\tau)\hat{A}^*} z - z, B^{u(\cdot)} p(\tau))\mathrm{d}\tau$$

$$+ \int_0^t (e^{-(t-\tau)\hat{A}^*} z - z, p(\tau) h \cdot \mathrm{d}y_\tau) + \int_0^t (z, p(s) h \cdot \mathrm{d}y_s)$$

$$+\int_0^t (z, B^{u(\cdot)}p(s))\mathrm{d}s$$

$$=(z, e^{-tA}p_0+\int_0^t e^{-(t-\tau)A}B^{u(\cdot)}p(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t e^{-(t-\tau)A}p(\tau)h\cdot \mathrm{d}y_\tau)$$

$$=(z, p(t)) \qquad \forall\ z\in D(A^*) \tag{6.5.6}$$

因为 $D(A^*)$ 在空间 H 中稠密，由式(6.5.6)得

$$p(t)=p_0-\int_0^t Ap(s)\mathrm{d}s+\int_0^t B^{u(\cdot)}p(s)\mathrm{d}s+\int_0^t p(s)h\cdot \mathrm{d}y_s$$ 证毕

定理 6.7 在 §6.4 的 (A_1)，(A_2) 和 (A_3) 的假定下，对任意的 $u^*(\cdot)$，$v(\cdot)\in U_{ad}$，$z(t,v)$ 是变分方程(6.5.2)的解，则对 $\forall\ \varepsilon\in(0,1)$，存在 $u^\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}$，使得相应于 $u^\varepsilon(\cdot)$ 与 $u^*(\cdot)$ 的状态方程(6.5.1)的解分别为 $p^\varepsilon(t)=p(t,u^\varepsilon(\cdot))$，$p^*(t)=p(t,u^*(\cdot))$，成立下式

$$p^\varepsilon(t)=p^*(t)+\varepsilon z(t,v)+\varepsilon r_\varepsilon(t),\ t\in[0,T],\ a.s. \tag{6.5.7}$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|r_\varepsilon(t)|^2\to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$$

证 用引理 1.2，对 $\forall\ \varepsilon\in(0,1)$，存在可测子集 $e_\varepsilon\subset[0,T]$，使得 $\mathrm{mes}\ e_\varepsilon=\varepsilon T$ 和

$$\varepsilon\int_0^t U(t,s)(B^{v(\cdot)}-B^{u^*(\cdot)})p^{u^*(\cdot)}(s)\mathrm{d}s$$

$$=\int_{e_\varepsilon\cap[0,t]} U(t,s)(B^{v(\cdot)}-B^{u^*(\cdot)})p^{u^*(\cdot)}(s)\mathrm{d}s+a_\varepsilon(t) \tag{6.5.8}$$

这里

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\varepsilon^{-2}E|a_\varepsilon(t)|^2\to 0(\varepsilon\to 0)$$

$$U(t,s)=e^{-(t-s)A},0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$$

令

$$u^\varepsilon(t)=\begin{cases}v(t), 当\ t\in e_\varepsilon\\ u^*(t), 当\ t\in[0,T]\backslash e_\varepsilon\end{cases}$$

用 $p^\varepsilon(t)=p(t,u^\varepsilon(\cdot))$ 表示相应于 $u^\varepsilon(\cdot)$ 的方程(6.5.1)的解。

令

$$r_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}(p^\varepsilon(t)-p^*(t))-z(t,v)$$

则 $r_\varepsilon(0)=0$ 和 $r_\varepsilon(t)$ 满足方程

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}r_\varepsilon(t) + Ar_\varepsilon(t)\mathrm{d}t = {} & \left\{(B^{u^\varepsilon(\cdot)} - B^{u^*(\cdot)})z(t) + B^{u^\varepsilon(\cdot)}r_\varepsilon(t)\right\}\mathrm{d}t \\
& + \left\{\varepsilon^{-1}(B^{u^\varepsilon(\cdot)} - B^{u^*(\cdot)})p^*(t) - (B^{v(\cdot)} - B^{u^\varepsilon(\cdot)})p^*(t)\right\}\mathrm{d}t \\
& + r_\varepsilon(t)h \cdot \mathrm{d}y_t
\end{aligned} \tag{6.5.9}
$$

用引理 6.7 和式(6.5.8)，有下式

$$
\begin{aligned}
r_\varepsilon(t) = {} & \int_0^t U(t,s)\left\{(B^{u^\varepsilon(\cdot)} - B^{u^*(\cdot)})z(s) + B^{u^\varepsilon(\cdot)}r_\varepsilon(s)\right\}\mathrm{d}s \\
& + \varepsilon^{-1}\int_0^t U(t,s)(B^{u^\varepsilon(\cdot)} - B^{u^*(\cdot)})p^*(s)\mathrm{d}s \\
& - \int_0^t U(t,s)(B^{v(\cdot)} - B^{u^\varepsilon(\cdot)})p^*(s)\mathrm{d}s \\
& + \int_0^t U(t,s)r_\varepsilon(s)h \cdot \mathrm{d}y_s \\
= {} & \int_0^t U(t,s)\left\{(B^{u^\varepsilon(\cdot)} - B^{u^*(\cdot)})z(s) + B^{u^\varepsilon(\cdot)}r_\varepsilon(s)\right\}\mathrm{d}s \\
& + \int_0^t U(t,s)r_\varepsilon(s)h \cdot \mathrm{d}y_s - \varepsilon^{-1}a_\varepsilon(t)
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
\tilde{r}_\varepsilon(t) = {} & \int_0^t U(t,s)\left\{(B^{u^\varepsilon(\cdot)} - B^{u^*(\cdot)})z(s) + B^{u^\varepsilon(\cdot)}r_\varepsilon(s)\right\}\mathrm{d}s \\
& + \int_0^t U(t,s)r_\varepsilon(s)h \cdot \mathrm{d}y_s
\end{aligned}
$$

则 $\tilde{r}_\varepsilon(0)=0$ 和 $r_\varepsilon(t)=\tilde{r}_\varepsilon(t)-\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(t)$。由引理 6.7 和 $\tilde{r}_\varepsilon(t)$的定义，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{r}_\varepsilon(t) + A\tilde{r}_\varepsilon(t)\mathrm{d}t = {} & \left\{(B^{u^\varepsilon(\cdot)} - B^{u^*(\cdot)})z(t) + B^{u^\varepsilon(\cdot)}r_\varepsilon(t)\right\}\mathrm{d}t \\
& + r_\varepsilon(t)h \cdot \mathrm{d}y_t
\end{aligned} \tag{6.5.10}
$$

对方程(6.5.10)用能量等式得

$$
\begin{aligned}
& E|\tilde{r}_\varepsilon(t)|^2 + 2E\int_0^t \langle A\tilde{r}_\varepsilon(s), \tilde{r}_\varepsilon(s)\rangle\mathrm{d}s \\
& \quad = 2E\int_0^t \langle (B^{u^\varepsilon(\cdot)} - B^{u^*(\cdot)})z(s), \tilde{r}_\varepsilon(s)\rangle\mathrm{d}s \\
& \quad\quad + 2E\int_0^t \langle B^{u^\varepsilon(\cdot)}r_\varepsilon(s), \tilde{r}_\varepsilon(s)\rangle\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{i=1}^{m}E\int_0^t|r_\varepsilon(s)h_i|^2\mathrm{d}s \tag{6.5.11}$$

下面我们来估计式(6.5.11)的右端的第二、三两项：

$$2E\int_0^t\langle B^{u^\varepsilon(\cdot)}r_\varepsilon(s),\tilde{r}_\varepsilon(s)\rangle\mathrm{d}s=2E\int_0^t\langle r_\varepsilon(s),\dot{B}^{u^\varepsilon(\cdot)}\tilde{r}_\varepsilon(s)\rangle\mathrm{d}s$$

$$=2E\int_0^t\langle B^{u^\varepsilon(\cdot)}\tilde{r}_\varepsilon(s),\tilde{r}_\varepsilon(s)\rangle\mathrm{d}s-2E\int_0^t\langle\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(s),\dot{B}^{u^\varepsilon(\cdot)}\tilde{r}_\varepsilon(s)\rangle\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\delta E\int_0^t|B^{u^\varepsilon(\cdot)}\tilde{r}_\varepsilon(s)|^2\mathrm{d}s+\delta^{-1}E\int_0^t|\tilde{r}_\varepsilon(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$+\delta E\int_0^t|\dot{B}^{u^\varepsilon(\cdot)}\tilde{r}_\varepsilon(s)|^2\mathrm{d}s+\delta^{-1}E\int_0^t|\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant c_1\delta E\int_0^t\|\tilde{r}_\varepsilon(s)\|^2\mathrm{d}s+\delta^{-1}E\int_0^t|\tilde{r}_\varepsilon(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$+\delta^{-1}E\int_0^t|\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(s)|^2\mathrm{d}s \tag{6.5.12}$$

$$\sum_{i=1}^{m}E\int_0^t|r_\varepsilon(s)h_i|^2\mathrm{d}s\leqslant h_0E\int_0^t|\tilde{r}_\varepsilon(s)|^2\mathrm{d}s+h_0E\int_0^t|\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(s)|^2\mathrm{d}s \tag{6.5.13}$$

其中$|\cdot|$，$\|\cdot\|$分别表示空间 H,V 上的范数，δ 与 h_0 是两个正常数。

用条件$\langle A\varphi,\varphi\rangle\geqslant\min(\alpha,\beta)\|\varphi\|^2=a_0\|\varphi\|^2\quad\forall\ \varphi\in V$，由式(6.5.11)、(6.5.12)和式(6.5.13)得

$$E|\tilde{r}_\varepsilon(t)|^2+(2a_0-c_1\delta)E\int_0^t\|\tilde{r}_\varepsilon(s)\|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant(h_0+\delta^{-1}+1)E\int_0^t|\tilde{r}_\varepsilon(s)|^2\mathrm{d}s+(h_0+\delta^{-1})E\int_0^t|\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$+E\int_0^t|(B^{u^\varepsilon(\cdot)}-B^{u^*(\cdot)})z(s)|^2\mathrm{d}s$$

选 $\delta>0$ 使得 $2a_0>c_1\delta$，然后用 Gronwall's 不等式得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|\tilde{r}_\varepsilon(t)|^2\leqslant c_1E\int_0^T|\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$+c_2E\int_0^T|(B^{u^\varepsilon(\cdot)}-B^{u^*(\cdot)})z(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$= c_1 E\int_0^T |\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(s)|^2 ds$$

$$+ c_2 E\int_{e_\varepsilon} |(B^{v(\cdot)} - B^{u^*(\cdot)})z(s)|^2 ds \to 0$$

$(\varepsilon \to 0)$ 证毕

§ 6.6 最优控制的最大值原理

本节我们将讨论状态方程为(6.5.1)时，其性能指标为

$$J(u) = E\left\{\int_0^T (f(\cdot,u_t),p^u(t))_H dt + (G,p^u(T))_H\right\} \quad (6.6.1)$$

的最优控制问题。$u^*(\cdot)\in U_{ad}$ 称为最优控制问题(6.5.1)—(6.6.1)的最优控制，是指

$$J(u^*) = \inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} J(u)$$

相应于最优控制 $u^*(\cdot)$ 的方程(6.5.1)的解 $p^*(t)=p(t,u^*(\cdot))$ 称为最优轨道。

在本节，我们要建立最优控制满足的必要条件。首先建立最优控制满足的必要条件是通过变分方程的解来表达的，是确定性的条件。由这个必要条件导出最优控制满足的最大值原理，这个条件是用协态来表达的，是随机性的条件。

定理 6.8 在 § 6.4 的(A_1)，(A_2)，(A_3)和(A_4)的假定下，设 U 是闭集，$u^*(\cdot)\in U_{ad}$是最优控制问题(6.5.1)—(6.6.1)的最优控制，$p^*(t)$是相应于 $u^*(t)$的最优轨道。任一 $v(\cdot)\in U_{ad}$，$z(t)=z(t,v)$是变分方程(6.5.2)的解，则

$$E\int_0^T (f(\cdot,u^*(s)),z(s,v))_H dt + E(G,z(T,v))_H$$

$$+ E\int_0^T \{(f(\cdot,v(s)),p^*(s))_H dt - (f(\cdot,u^*(s)),p^*(s))_H\} ds \geq 0$$

(6.6.2)

证 约定 $S=U_{ad}$，$\forall\, u(\cdot),v(\cdot)\in S$，定义

$$\rho(u(\cdot),v(\cdot)) = E\int_0^T \frac{|u(t)-v(t)|}{1+|u(t)-v(t)|}dt$$

则 ρ 是 S 上的距离，(S,ρ)是一个完备的距离空间。从距离 ρ 的定义，依距离 ρ 的收敛等价于依测度 $\mathrm{d}t\mathrm{d}P$ 的收敛。

考虑下面的(S,ρ)空间上的函数

$$J^\varepsilon(v(\cdot)) = \{(J(v) - J(u^*) + \varepsilon)^2 + (J(v) - J(u^*))^2\}^{\frac{1}{2}}$$

其中 $\varepsilon>0$，$J(v)$是用式(6.6.1)定义的泛函，$u^*(\cdot)$是最优控制。

依定义，显然有

$$0 < \inf_{v(\cdot)\in S} J^\varepsilon(v(\cdot)) \leqslant J^\varepsilon(u^*(\cdot))$$

$$J^\varepsilon(u^*(\cdot)) < \inf_{v(\cdot)\in S} J^\varepsilon(v(\cdot)) + \varepsilon$$

依假定(A_1)，(A_3)和(A_4)，$J^\varepsilon(v(\cdot))$是距离空间(S,ρ)上的连续泛函。用第一章§1.2的引理1.1，存在 $u^\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot)) \leqslant J^\varepsilon(u^*(\cdot)), \tag{6.6.3}$$

$$J^\varepsilon(v(\cdot)) \geqslant J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot)) - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\rho(u^\varepsilon(\cdot),v(\cdot)), \forall\ v(\cdot)\in U_{ad} \tag{6.6.4}$$

$$\rho(u^\varepsilon(\cdot),u^*(\cdot)) \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tag{6.6.5}$$

对任一 $v(\cdot)\in U_{ad}$，用 $z^\varepsilon(t,v)$表示在变分方程(6.5.2)中用 $u^\varepsilon(t)$代替 $u^*(t)$后的解。对 $\lambda\in(0,1)$，依第一章§1.2的引理1.2和定理6.7，存在可测子集 $e_\lambda\subset[0,T]$和 $u_\lambda^\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$\text{mes } e_\lambda = \lambda T$$

$$u_\lambda^\varepsilon(t) = \begin{cases} v(t), \text{当 } t\in e_\lambda \\ u^\varepsilon(t), \text{当 } t\in[0,T]\backslash e_\lambda \end{cases}$$

$$p_\lambda^\varepsilon(t) = p^\varepsilon(t) + \lambda z^\varepsilon(t,v) + \lambda r_\lambda^\varepsilon(t), a.s.$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|r_\lambda^\varepsilon(t)|^2 \to 0(\lambda\to 0)$$

$$\lambda\int_0^T\{(f(\cdot,v(s)),p^\varepsilon(s))_H - (f(\cdot,u^\varepsilon(s)),p^\varepsilon(s))_H\}\mathrm{d}s$$

$$= \int_{e_\lambda}\{(f(\cdot,v(s)),p^\varepsilon(s))_H - (f(\cdot,u^\varepsilon(s)),p^\varepsilon(s))_H\}\mathrm{d}s + o(\lambda) \tag{6.6.6}$$

其中 $p^\varepsilon(t)$，$p_\lambda^\varepsilon(t)$是分别相应于 $u^\varepsilon(t)$，$u_\lambda^\varepsilon(t)$的状态方程(6.5.1)的解，$o(\lambda)/\lambda\to 0(\lambda\to 0)$

计算泛函 $J(\cdot)$在元 $u_\lambda^\varepsilon(\cdot)$与 $u^\varepsilon(\cdot)$的值之差

$$J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot))-J(u^\varepsilon(\cdot))=E\int_0^T\{(f(\cdot,u_\lambda^\varepsilon(t)),p_\lambda^\varepsilon(t))_H$$
$$-(f(\cdot,u^\varepsilon(t)),p^\varepsilon(t))_H\}\mathrm{d}t+E(G,p_\lambda^\varepsilon(T)-p^\varepsilon(T))_H$$
$$=E\int_0^T\{(f(\cdot,u_\lambda^\varepsilon(t)),p^\varepsilon(t)+\lambda z^\varepsilon(t)+\lambda r_\lambda^\varepsilon(t))_H$$
$$-(f(\cdot,u_\lambda^\varepsilon(t)),p^\varepsilon(t))_H\}\mathrm{d}t$$
$$+E\int_0^T\{(f(\cdot,u_\lambda^\varepsilon(t)),p^\varepsilon(t))_H-(f(\cdot,u^\varepsilon(t)),p^\varepsilon(t))_H\}\mathrm{d}t$$
$$+E(G,\lambda z^\varepsilon(T)+\lambda r_\lambda^\varepsilon(T))_H$$
$$=\lambda E\int_0^T(f(\cdot,u_\lambda^\varepsilon(t)),z^\varepsilon(t,v))_H\mathrm{d}t+\lambda E(G,z^\varepsilon(T,v))_H$$
$$+E\int_0^T\{(f(\cdot,u_\lambda^\varepsilon(t)),p^\varepsilon(t))_H$$
$$-(f(\cdot,u^\varepsilon(t)),p^\varepsilon(t))_H\}\mathrm{d}t+o(\lambda) \qquad (6.6.7)$$

这里 $o(\lambda)/\lambda\to0 \quad (\lambda\to0)$

依距离 ρ 的定义有

$$\rho(u_\lambda^\varepsilon(\cdot),u^\varepsilon(\cdot))=E\int_0^T\frac{|u_\lambda^\varepsilon(t)-u^\varepsilon(t)|}{1+|u_\lambda^\varepsilon(t)-u^\varepsilon(t)|}\mathrm{d}t\leqslant E\int_{e_\lambda}\mathrm{d}t$$
$$=\mathrm{mes}\ e_\lambda=\lambda T\to0 \quad (\lambda\to0) \qquad (6.6.8)$$

用第一章§1.2的引理1.3，由式(6.6.7)、(6.6.6)、(6.6.4)和式(6.6.8)，得

$$J'(u_\lambda^\varepsilon(\cdot))-J'(u^\varepsilon(\cdot))=\frac{(J(u^\varepsilon)-J(u^*)+\varepsilon)+(J(u^\varepsilon)-J(u^*))}{\{(J(u^\varepsilon)-J(u^*)+\varepsilon)^2+(J(u^\varepsilon)-J(u^*))^2\}^{1/2}}$$
$$\times(J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot))-J(u^\varepsilon(\cdot)))+o(\lambda)$$
$$=\beta(\varepsilon)(J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot))-J(u^\varepsilon(\cdot)))+o(\lambda)$$
$$=\beta(\varepsilon)\Big\{\lambda E\int_0^T(f(\cdot,u_\lambda^\varepsilon(t)),z^\varepsilon(t,v))_H\mathrm{d}t+\lambda E(G,z^\varepsilon(T,v))_H$$
$$+\lambda E\int_0^T((f(\cdot,v(t)),p^\varepsilon(t))_H-(f(\cdot,u^\varepsilon(t)),p^\varepsilon(t))_H)\mathrm{d}t\Big\}$$
$$+o(\lambda)\geqslant-\varepsilon^{1/2}\rho(u_\lambda^\varepsilon(\cdot),u^\varepsilon(\cdot))\geqslant-\varepsilon^{1/2}\lambda T \qquad (6.6.9)$$

这里 $o(\lambda)/\lambda\to0 \quad (\lambda\to0)$和

$$\beta(\varepsilon)=\frac{(J(u^\varepsilon)-J(u^*)+\varepsilon)+(J(u^\varepsilon)-J(u^*))}{\{(J(u^\varepsilon)-J(u^*)+\varepsilon)^2+(J(u^\varepsilon)-J(u^*))^2\}^{1/2}}$$

依假定 $u^*(\cdot)$是最优控制，有 $J(u^\varepsilon)-J(u^*)\geqslant 0,\forall\ \varepsilon\in(0,1)$。当 $a\geqslant 0,b\geqslant 0,a+b>0$，用初等不等式：$1\leqslant(a+b)^2(a^2+b^2)^{-1}\leqslant 2$。取 $a=(J(u^\varepsilon)-J(u^*)+\varepsilon),b=(J(u^\varepsilon)-J(u^*))$，从 $\beta(\varepsilon)$的定义和初等不等式得 $1\leqslant\beta^2(\varepsilon)\leqslant 2,\forall\ \varepsilon\in(0,1)$。因此，数集$\{\beta(\varepsilon)\},\varepsilon\in(0,1)$是有界集。于是，可以选出一子列 $\beta(\varepsilon_i)\to\beta_0(\varepsilon_i\to 0,i\to\infty)$和 $1\leqslant\beta_0\leqslant 2$。由式(6.6.9)得

$$\beta(\varepsilon_i)\Big\{E\int_0^T(f(\cdot,u^{\varepsilon_i}_\lambda(t)),z^{\varepsilon_i}(t,v))_H\mathrm{d}t+E(G,z^{\varepsilon_i}(T,v))_H$$

$$+E\int_0^T((f(\cdot,v(t)),p^{\varepsilon_i}(t))_H-(f(\cdot,u^{\varepsilon_i}(t)),p^{\varepsilon_i}(t))_H)\mathrm{d}t\Big\}$$

$$+o(1)\geqslant-\varepsilon_i^{\frac{1}{2}}T \tag{6.6.10}$$

这里 $o(1)\to 0(\lambda\to 0)$

依式(6.6.8)，$\rho(u^{\varepsilon_i}_{\lambda_j}(\cdot),u^{\varepsilon_i}(\cdot))\leqslant\lambda T\to 0(\lambda\to 0)$，这等价于依测度 $\mathrm{d}t\mathrm{d}P$ 收敛。因此，存在子列$\{u^{\varepsilon_i}_{\lambda_j}(t)\}$，使得

$$u^{\varepsilon_i}_{\lambda_j}(t)\to u^{\varepsilon_i}(t)(j\to\infty),a.e.\ t,a.s.$$

其中 $\lambda_j\to 0(j\to\infty)$

由此得

$$E\int_0^T(f(\cdot,u^{\varepsilon_i}_{\lambda_j}(t)),z^{\varepsilon_i}(t,v))_H\mathrm{d}t\to E\int_0^T(f,(\cdot,u^{\varepsilon_i}(t)),z^{\varepsilon_i}(t,v))_H\mathrm{d}t$$

$(j\to\infty)$

在式(6.6.10)中，取 $\lambda=\lambda_j$，令 $j\to\infty$得

$$\beta(\varepsilon_i)\Big\{E\int_0^T(f(\cdot,u^{\varepsilon_i}(t)),z^{\varepsilon_i}(t,v))_H\mathrm{d}t+E(G,z^{\varepsilon_i}(T,v))_H$$

$$+E\int_0^T((f(\cdot,v(t)),p^{\varepsilon_i}(t))_H-(f(\cdot,u^{\varepsilon_i}(t)),p^{\varepsilon_i}(t))_H)\mathrm{d}t\Big\}$$

$$\geqslant-\varepsilon_i^{\frac{1}{2}}T \tag{6.6.11}$$

由式(6.6.5)，$\rho(u^{\varepsilon_i}(\cdot),u^*(\cdot))\to 0(i\to\infty)$。这等价于列$\{u^{\varepsilon_i}(t)\}$依测度 $\mathrm{d}t\mathrm{d}P$ 收敛，所以存在子列 $u^{\varepsilon_l}(t)\to u^*(t)(l\to\infty),a.e.\ t\in[0,T],a.s.$，而 $\varepsilon_l\to 0(l\to\infty)$。于是相应于 $u^{\varepsilon_l}(t)$的状态方程(6.5.1)的解 $p^{\varepsilon_l}(t)$有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|p^{\varepsilon_l}(t)-p^*(t)|^2\to 0(l\to\infty)$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} E\left|z^{\varepsilon_l}(t,v) - z(t,v)\right|^2 \to 0(l\to\infty)$$

在式(6.6.11)中,取 $\varepsilon=\varepsilon_l$,然后令 $l\to\infty$,得

$$\beta_0\Big\{E\int_0^T(l(\cdot,u^*(t)),z(t,v))_H\mathrm{d}t + E(G,z(T,v))_H$$

$$+ E\int_0^T((f(\cdot,v(t)),p^*(t))_H - (f(\cdot,u^*(t)),p^*(t))_H)\mathrm{d}t\Big\}\geqslant 0$$

但是 $\beta_0\geqslant 1$,所以由上式得式(6.6.2)。 证毕

定理 6.9 假定 g,σ,f,h 和 G 满足§6.4 的假定(A_1),(A_2),(A_3)和(A_4),U 是闭集,$u^*(\cdot)\in U_{ad}$是控制问题(6.5.1)—(6.6.1)的最优控制,$p^*(t)$是相应于 $u^*(t)$的状态方程(6.5.1)的解,则存在唯一的元素对$(\psi^*(\cdot),K(\cdot))\in L_{\mathscr{F}}^2((0,T),V)\times L_{\mathscr{F}}^2((0,T),(H)^m)$,使得$(p^*(t),\psi^*(t),K(t),u^*(t))$满足下面的随机偏微分方程和最大值原理:

(1)最大值原理

$$\max_{u\in U} H(p^*(t),\psi^*(t),u) = H(p^*(t),\psi^*(t),u^*(t))$$

$$a.e.\ t\in[0,T],a.s. \qquad (6.6.12)$$

(2)随机偏微分方程

$$-\mathrm{d}\psi^*(t) + A\psi^*(t)\mathrm{d}t = \{f(\cdot,u^*(t)) + g(\cdot,u^*(t))\cdot\nabla\psi^*(t)$$

$$-\mathrm{div}\bar{a}(\cdot)\cdot\nabla\psi^*(t) + h(\cdot)\cdot K(t)\}\mathrm{d}t - K(t)\cdot\mathrm{d}y_t$$

$$(6.6.13)$$

$$\psi^*(T) = G(\cdot)$$

其中

$$H(p,\psi,u) = (-f(x,u) + g(\cdot,u)\cdot\nabla\psi,p)_H$$

$\bar{a}(x)=(a_1^{(r)}(x),\cdots,a_k^{(r)}(x))$,$a_j^{(r)}(x)$表示矩阵 $a(x)=\dfrac{1}{2}(\sigma(x)\sigma^*(x))$的第 r 行,$(r=1,\cdots,k)$。

$\nabla=(\partial_{x_1},\cdots,\partial_{x_k})$表示梯度算符,div 表示散度算符,$\partial_x\psi$ 表示在 Sobolev 意义下的广义导数,$(H)^m=H\times\cdots\times H$($m$ 个)。下面用$(\cdot,\cdot)_m$ 表示$(H)^m$ 中的内积。

证 对任一元素对$(\varphi,\phi)\in L_{\mathscr{F}}^2((0,T),V')\times L_{\mathscr{F}}^2((0,T),(H)^m)$,考虑下面方程的解:

$$d\rho(t) + A\rho(t)dt = (B^{u^*(\cdot)}\rho(t) + \varphi(t))dt + (\rho(t)h + \psi(t)) \cdot dy_t \quad (6.6.14)$$

$$\rho(0) = 0$$

$$\rho(\cdot) \in L_{\mathcal{F}}^2((0,T),V) \cap C([0,T],L^2(\Omega,P,H))$$

对$\forall$ $(\varphi,\psi) \in L_{\mathcal{F}}^2((0,T),V') \times L_{\mathcal{F}}^2((0,T),(H)^m)$，方程(6.6.14)存在唯一解$\rho(t)$。因此，可以定义映射

$(\varphi,\psi) \to \rho(\cdot): L_{\mathcal{F}}^2((0,T),V') \times L_{\mathcal{F}}^2((0,T),(H)^m) \to L_{\mathcal{F}}^2((0,T),V) \cap C([0,T],L^2(H))$

这个映射$(\varphi,\psi) \to \rho(\cdot)$是线性连续的。现在考虑空间$L_{\mathcal{F}}^2((0,T),V') \times L_{\mathcal{F}}^2((0,T),(H)^m)$上的线性连续泛函

$$J(\varphi,\psi) = E\int_0^T (f(\cdot,u^*(t)),\rho(t))_H dt + E(G,\rho(T))_H$$

其中$\rho(t)$是相应于(φ,ψ)的方程(6.6.14)的解。

用泛函分析中的Rieze's表现定理，存在唯一元素对$(\psi^*,K) \in L_{\mathcal{F}}^2((0,T),V) \times L_{\mathcal{F}}^2((0,T),(H)^m)$，使得$\forall$ $(\varphi,\psi) \in L_{\mathcal{F}}^2((0,T),V') \times L_{\mathcal{F}}^2((0,T),(H)^m)$成立

$$E\left\{\int_0^T (f(\cdot,u^*(t)),\rho(t))_H dt + (G,\rho(T))_H\right\}$$
$$= E\int_0^T \langle \psi^*(t),\varphi(t)\rangle dt + E\int_0^T (K(t),\psi(t))_m dt \quad (6.6.15)$$

这里$\langle \cdot,\cdot \rangle$表示空间$V$与$V'$的对偶积。

任一$v(\cdot) \in U_{ad}$，在方程(6.6.14)中，取$\psi(t) \equiv 0$和$\varphi(t) = (B^{v(\cdot)} - B^{u^*(\cdot)})p^{u^*(\cdot)}(t)$。此时，方程(6.6.14)是变分方程(6.5.2)，并且式(6.6.14)的解$\rho(t)$就是变分方程(6.5.2)的解$z(t,v)$。将$\rho(t) = z(t,v)$，$\varphi(t) = (B^{v(\cdot)} - B^{u^*(\cdot)})p^{u^*(\cdot)}(t)$和$\psi(t) \equiv 0$代入式(6.6.15)，得

$$E\left\{\int_0^T (f(\cdot,u^*(t)),z(t,v))_H dt + (G,z(T,v))_H\right\}$$
$$= E\int_0^T (\psi^*(t),(B^{v(\cdot)} - B^{u^*(\cdot)})p^{u^*(\cdot)}(t))_H dt \quad (6.6.16)$$

从式(6.6.16)和定理6.8的不等式(6.6.2)，得

$$E\int_0^T(\psi^*(t),(B^{v(\cdot)}-B^{u^*(\cdot)})p^{u^*(\cdot)}(t))_H\mathrm{d}t$$

$$+E\left\{\int_0^T((f(\cdot,v(t)),p^{u^*(\cdot)}(t))_H-(f(\cdot,u^*(t)),p^{u^*(\cdot)}(t))_H)\mathrm{d}t\right\}$$

$$\geqslant 0\qquad\forall\ v(\cdot)\in U_{ad}\tag{6.6.17}$$

依算子 B^v 的定义，有下式

$$(B^{v(\cdot)}-B^{u^*(\cdot)})p^{u^*(\cdot)}=-(g(x,v(t))-g(x,u^*(t)))\cdot\nabla p^*$$
$$-p^*\mathrm{div}(g(x,v(t))-g(x,u^*(t)))$$

由此可得

$$(\psi^*(t),(B^{v(\cdot)}-B^{u^*(\cdot)})p^{u^*(\cdot)}(t))_H$$
$$=-((g(\cdot,v(t))-g(\cdot,u^*(t)))\cdot\nabla\psi^*(t),p^{u^*(\cdot)}(t))_H\tag{6.6.18}$$

将式(6.6.18)代入式(6.6.17)，得

$$E\int_0^T(-f(\cdot,u^*(t))+g(\cdot,u^*(t))\cdot\nabla\psi^*(t),p^{u^*(\cdot)}(t))_H\mathrm{d}t$$

$$\geqslant E\int_0^T(-f(\cdot,v(t))+g(\cdot,v(t))\cdot\nabla\psi^*(t),p^{u^*(\cdot)}(t))_H\mathrm{d}t$$

用 Hamiltonian 函数 $H(p,\psi,u)$ 来表达上式，有

$$E\int_0^T H(p^*(t),\psi^*(t),v(t))\mathrm{d}t\leqslant E\int_0^T H(p^*(t),\psi^*(t),u^*(t))\mathrm{d}t$$
$$\forall\ v(\cdot)\in U_{ad}\tag{6.6.19}$$

对任一 $u\in U$，令

$$h(t)=H(p^*(t),\psi^*(t),u^*(t))-H(p^*(t),\psi^*(t),u)$$
$$e=\{(t,\omega)\mid(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega,h(t)<0\}$$

如果集 e 的 $\mathrm{d}t\mathrm{d}P$ 测度 >0。取

$$\hat{v}(t)=\begin{cases}u,\text{当}(t,\omega)\in e\\ u^*(t),\text{当}(t,\omega)\notin e\end{cases}$$

则 $\hat{v}(\cdot)\in U_{ad}$。将 $\hat{v}(t)$ 代入式(6.6.19)，得

$$\iint_e h(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}P\geqslant 0$$

另一方面，依假定集 e 的测度为正，则

$$\iint_e h(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}P < 0$$

这是一矛盾。因此必须 mes $e=0$。即是 $h(t)\geqslant 0, a.e.\ t\in[0,T], a.s.$，所以有

$$\max_{u\in U} H(p^*(t),\psi^*(t),u) = H(p^*(t),\psi^*(t),u^*(t)), a.e.\ t, a.s.$$

这就证明了最大值原理(1)。

为了证明定理的第二部分，$(\psi^*(t),K(t))$满足随机偏微分方程(6.6.13)，先证明下面的引理。

引理 6.8 设 H 是一个实的可分的 Hilbert 空间，$\{w_t\}, t\in[0,T]$是一个在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 Wiener 过程，让

$$\mathscr{F}_t = \sigma(w_s; s\leqslant t), t\in[0,T]$$

是由 Wiener 过程 w_t 产生的滤子$\{\mathscr{F}_t\}, t\in[0,T]$。$x(t)$是一个在空间 H 中取值的平方可积(即是$|x(t)|^2$ 可积)的$\{\mathscr{F}_t\}$—鞅，$Ex(t)=0, \forall\ t\in[0,T]$，则存在 $K(\cdot)\in L_w^2((0,T),H)$，使得

$$x(t) = \int_0^t K(s)\mathrm{d}w_s \quad \forall\ t\in[0,T], a.s. \qquad (6.6.20)$$

证 让$\{e_i\}$是空间 H 中的规范直交基，H_n 是由$\{e_1,\cdots,e_n\}$张成的 n 维线性子空间。令

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^n (x(t),e_i)e_i$$

则对于每一个自然数 n，$x_n(t)$是在 H_n 中取值的平方可积的$\{\mathscr{F}_t\}$—鞅。依有穷维空间中的鞅的表示定理，存在 $K_n(\cdot)\in L_w^2((0,T),H_n)$，使得

$$x_n(t) = \int_0^t K_n(s)\mathrm{d}w_s, a.s., \forall\ t\in[0,T]$$

用上面的表达式和 Itô 积分的性质，得

$$E\int_0^T |K_m(s)-K_l(s)|^2\mathrm{d}s = E\left|\int_0^T (K_m(s)-K_l(s))\mathrm{d}w_s\right|^2$$

$$= E|x_m(T)-x_l(T)|^2 \to 0(l,m\to\infty)$$

因此列$\{K_n(\cdot)\}$是空间 $L_w^2((0,T),H)$中的基本列，存在 $K(\cdot)\in L_w^2((0,T),H)$，使得

$$E\int_0^T |K_n(s) - K(s)|^2 ds \to 0 (n \to \infty)$$

则

$$x(t) = \int_0^t K(s) dw_s, a.s. \forall t \in [0,T]$$ 证毕

定理 6.9 的(2)的证明 式(6.6.15)中的$(\varphi,\psi) \in L_y^2((0,T),V') \times L_y^2((0,T),(H)^m)$是任意的，任取$(\dot{\phi},\hat{\psi}) \in L_y^2((0,T),V') \times L_y^2((0,T),(H)^m)$。令

$$\phi(s) = - B^{n*}(\cdot)\rho(s) + \dot{\phi}(s)$$

$$\psi(s) = - h\rho(s) + \hat{\psi}(s)$$

则方程(6.6.14)可写为

$$d\rho(t) + A\rho(t)dt = \dot{\phi}dt + \hat{\psi} \cdot dy_t \tag{6.6.21}$$

$$\rho(0) = 0$$

并且式(6.6.15)可写为

$$E\left\{\int_0^T (\hat{f}(\cdot,t),\rho(t))_H dt + (G,\rho(T))_H\right\}$$

$$= E\int_0^T \langle \psi^*(t), \dot{\phi}(t)\rangle dt + E\int_0^T (K(t),\hat{\psi}(t))_m dt$$

$$\forall (\dot{\phi},\hat{\psi}) \in L_y^2((0,T),V') \times L_y^2((0,T),(H)^m) \tag{6.6.22}$$

其中

$$\hat{f}(\cdot,t) = f(\cdot,u^*(t)) + B^{*n*}(\cdot)\psi^*(t) + h \cdot K(t)$$

式(6.6.22)中的$\dot{\phi},\hat{\psi}$是任意的，取$\hat{\psi} \equiv 0$。此时，方程(6.6.21)的解为

$$\rho(t) = \int_0^t e^{-(t-s)\tilde{A}}\dot{\phi}(s) ds$$

将上面$\rho(t)$的表达式代入式(6.6.22)的左端，得

$$E\int_0^T \langle \psi^*(t), \dot{\phi}(t)\rangle dt = E\int_0^T (G, e^{-(T-s)\tilde{A}}\dot{\phi}(s))_H ds$$

$$+ E\int_0^t (\hat{f}(\cdot,t), \int_0^t e^{-(t-s)\tilde{A}}\dot{\phi}(s)ds)_H dt$$

$$= E\int_0^T (e^{-(T-s)\tilde{A}^*}G + \int_s^T e^{-(t-s)\tilde{A}^*}\hat{f}(\cdot,t)dt, \dot{\phi}(s))_H ds$$

$$\forall\ \phi(\cdot) \in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V')$$

$\forall\ \tau\in[0,s]$，从上式得

$$E\int_0^T\left\{E^{\mathscr{F}_\tau}(\psi^*(s)-e^{-(T-s)\hat{A}^*}G-\int_s^T e^{-(t-s)\hat{A}^*}\hat{f}(\cdot,t)\mathrm{d}t,\phi(s))_H\right\}\mathrm{d}s$$
$$=0,\forall\ \phi(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}_\tau}((0,T),H)$$

则

$$E^{\mathscr{F}_\tau}(\psi^*(s)-e^{-(T-s)\hat{A}^*}G-\int_s^T e^{-(t-s)\hat{A}^*}\hat{f}(\cdot,t)\mathrm{d}t)=0,\tau\in[0,s]$$
$$(6.6.23)$$

其中符号 $E^{\mathscr{F}_\tau}$表示对 σ-域 $\mathscr{F}_\tau$的条件期望。

令

$$\gamma(s,\tau)=E^{\mathscr{F}_\tau}(\psi^*(s)-e^{-(T-s)\hat{A}^*}G-\int_s^T e^{-(t-s)\hat{A}^*}\hat{f}(\cdot,t)\mathrm{d}t)$$

依式(6.6.23)，当 $\tau\in[0,s]$时，$\gamma(s,\tau)=0$。对任意固定的 $s\in[0,T]$，$\gamma(s,\tau)$是$\{\mathscr{F}_\tau\}$—鞅，从引理 6.8，存在 $\hat{K}(s,\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),(H)^m)$，使得

$$\gamma(s,\tau)=\int_s^\tau \hat{K}(s,t)\cdot\mathrm{d}y_t$$

依上所述，$\gamma(s,\tau)=0,\forall\ \tau\in[0,s]\Rightarrow\hat{K}(s,t)=0,\forall\ t\in[0,s]$。则

$$\psi^*(s)-e^{-(T-s)\hat{A}^*}G-\int_s^T e^{(t-s)\hat{A}^*}\hat{f}(\cdot,t)\mathrm{d}t=\int_s^T\hat{K}(s,t)\cdot\mathrm{d}y_t$$
$$(6.6.24)$$

对任一 $\tau\in[0,T]$，令 $\phi(s)\equiv0,\tilde{\varphi}(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),(H)^m)$。约定

$$\hat{\varphi}(s)=\begin{cases}0, & \text{当 } s\in[0,\tau]\\ e^{-(s-\tau)\hat{A}}\tilde{\varphi}(s), & \text{当 } s\in[\tau,T]\end{cases}$$

将元素对$(\phi(s),\hat{\varphi}(s))=(0,\hat{\varphi}(s))$代入方程(6.6.22)，得

$$E\int_\tau^T(e^{-(s-\tau)\hat{A}^*}K(s),\tilde{\varphi}(s))_H\mathrm{d}s$$
$$=E\int_0^T(\hat{f}(\cdot,t),\int_\tau^t e^{-(t-\tau)\hat{A}}\tilde{\varphi}(s)\cdot\mathrm{d}y_s)_H\mathrm{d}t$$
$$+E(e^{-(T-\tau)\hat{A}^*}G,\int_\tau^T\tilde{\varphi}(s)\cdot\mathrm{d}y_s)_H \qquad (6.6.25)$$

在式(6.6.24)中，令 $s=\tau$，有

$$\psi^*(\tau)-e^{-(T-\tau)\hat{A}^*}G-\int_\tau^T e^{-(t-\tau)\hat{A}^*}\hat{f}(\cdot,t)\mathrm{d}t=\int_\tau^T \hat{K}(\tau,t)\cdot\mathrm{d}y_t \tag{6.6.26}$$

在式(6.6.26)的两端，用元素

$$-\int_\tau^T\tilde{\psi}(s)\cdot\mathrm{d}y_s$$

取内积后，再取数学期望，得

$$\begin{aligned}-E\int_\tau^T(\hat{K}(\tau,t),\tilde{\psi}(t))_m\mathrm{d}t&=-E\left(\int_\tau^T\hat{K}(\tau,s)\cdot\mathrm{d}y_s,\int_\tau^T\tilde{\psi}(s)\cdot\mathrm{d}y_s\right)_m\\&=E\left(e^{-(T-\tau)\hat{A}^*}G,\int_\tau^T\tilde{\psi}(s)\cdot\mathrm{d}y_s\right)_H\\&\quad+E\int_0^T\left(\hat{f}(\cdot,t),\int_\tau^T e^{-(t-\tau)\hat{A}}\tilde{\psi}(s)\cdot\mathrm{d}y_s\right)_H\end{aligned}\tag{6.6.27}$$

比较式(6.6.25)与式(6.6.27)，得

$$E\int_\tau^T(e^{-(s-\tau)\hat{A}^*}K(s)+\hat{K}(\tau,s),\tilde{\psi}(s))_m\mathrm{d}s=0$$

$$\forall\ \tilde{\psi}(\cdot)\in L_y^2((0,T),(H)^m)$$

$$\hat{K}(\tau,s)=-e^{-(s-\tau)\hat{A}^*}K(s)\quad\forall\ \tau\in[0,T]\tag{6.6.28}$$

将式(6.6.28)的 $\hat{K}(\tau,s)$ 代入式(6.6.24)，有

$$\psi^*(s)=e^{-(T-s)\hat{A}^*}G+\int_s^T e^{-(t-s)\hat{A}^*}\hat{f}(\cdot,t)\mathrm{d}t-\int_s^T e^{-(t-s)\hat{A}^*}K(t)\cdot\mathrm{d}y_t$$

将上式写成微分形式为

$$\begin{aligned}&-\mathrm{d}\psi^*(t)+A\psi^*(t)\mathrm{d}t=\hat{f}(\cdot,t)\mathrm{d}t-K(t)\cdot\mathrm{d}y_t\\&=\{f(\cdot,u^*(t))+B^{*u^*(\cdot)}\psi^*(t)+h\cdot K(t)\}\mathrm{d}t-K(t)\cdot\mathrm{d}y_t\end{aligned}\tag{6.6.29}$$

$$\psi^*(T)=G(\cdot)$$

依算子 B^u 的定义，对 $\forall\ p\in V$，有

$$B^u p=\sum_{i=1}^k a_i(x,u)\frac{\partial p}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^k\frac{\partial a_i(x,u)}{\partial x_i}p$$

$$= -\sum_{i=1}^{k} g_i(x,u)\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial g_i(x,u)}{\partial x_i}p + \sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial^2 a_{ij}(x)}{\partial x_i \partial x_j}p$$

因此，对任一 $\hat{p}\in L^2(R^k)$，用 $\hat{p}$ 于上式两端取内积，得

$$(\hat{p},B^u p)_H = -(\hat{p},g\cdot\nabla p) - (\hat{p},p\mathrm{div}g)_H$$

$$+\sum_{i,j=1}^{k}\left(\hat{p},\frac{\partial a_{ij}(\cdot)}{\partial x_j}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)_H + \sum_{i,j=1}^{k}\left(\hat{p},\frac{\partial^2 a_{ij}(\cdot)}{\partial x_i\partial x_j}p\right)_H \tag{6.6.30}$$

对 $\hat{p}\in V$ 时，有

$$-(\hat{p},g\cdot\nabla p)_H = -\int_{R^k}\hat{p}(x)\sum_{i=1}^{k}g_i(x,u)\frac{\partial p}{\partial x_i}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{R^k}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_i}(\hat{p}g_i)p\mathrm{d}x$$

$$=(g\cdot\nabla\hat{p},p)_H + (\hat{p}\mathrm{div}g,p)_H \tag{6.6.31}$$

$$\sum_{i,j=1}^{k}\left(\hat{p},\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)_H = \sum_{i,j=1}^{k}\int_{R^k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial p}{\partial x_i}\hat{p}(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\sum_{i,j=1}^{k}\int_{R^k}\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i\partial x_j}p(x)\hat{p}(x)\mathrm{d}x$$

$$-\sum_{i,j=1}^{k}\int_{R^k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i}p\mathrm{d}x \tag{6.6.32}$$

将式(6.6.31)和式(6.6.32)代入式(6.6.30)，得

$$(\hat{p},B^u p)_H = (g\cdot\nabla\hat{p},p)_H - \left(\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial\hat{p}}{\partial x_i},p\right)_H$$

$$=\left(g\cdot\nabla\hat{p} - \sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial\hat{p}}{\partial x_i},p\right)_H$$

$$=(B^{*u}\hat{p},p)_H \quad \forall\ p,\hat{p}\in V$$

因此，算子 B^u 的伴随算子为

$$B^{*u}\hat{p} = g\cdot\nabla\hat{p} - \sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial\hat{p}}{\partial x_i}$$

$$=g \cdot \nabla p - \mathrm{div}\bar{a} \cdot \nabla p \quad \forall\ \hat{p} \in V \tag{6.6.33}$$

将 $B^{*u^*(\cdot)}\psi^*(t)$的表达式(6.6.33)代入方程(6.6.29)，得

$$-\mathrm{d}\psi^*(t)+A\psi^*(t)\mathrm{d}t=\{f(\cdot,u^*(t))+g\cdot\nabla\psi^*(t)-\mathrm{div}\bar{a}\cdot\nabla\psi^*(t)$$
$$+h\cdot K(t)\}\mathrm{d}t-K(t)\cdot \mathrm{d}y_t \tag{6.6.34}$$
$$\psi^*(T)=G(\cdot)$$

这就证明了$(\psi^*(t),K(t))$满足方程(6.6.13)。 证毕

§6.7 半群包络与部分观测信息的随机系统的最优控制

从定理 6.4 已知，Zakai 随机偏微分方程(6.4.6)的解 $p_{p_0}^u(t)$是在空间 H 中取值的一个马尔可夫过程，由此可以定义一个在某个 Banach 空间上的线性算子半群。

约定

$B=\{f(\cdot)\mid f(\cdot)$是定义在 Hilbert 空间 H 上的 Borel 有界泛函$\}$

$C=\{f(\cdot)\mid f(\cdot)$是定义在 Hilbert 空间 H 上的一致连续有界泛函$\}$

定义 6.3 对$\forall\ f\in B$，定义

$$\Phi^u(t)(f)(p_0)=E[f(p_{p_0}^u(t))] \tag{6.7.1}$$

用定理 6.4，对$\forall\ f\in B, p_0\in H, \forall\ t,s\geqslant 0$，有下列等式

$$\begin{aligned}(\Phi^u(t)\Phi^u(s)f)(p_0) &= \Phi^u(t)(\Phi^u(s)f)(p_0)\\ &= E[(\Phi^u(s)f)(p_{p_0}^u(t))]\\ &= E[E(f(p_v^u(s))\mid_{v=p_{p_0}(t)})]\\ &= E[E(f(p_{p_0}^u(t+s))\mid \mathscr{F}_t)]\\ &= E[f(p_{p_0}^u(t+s))]\\ &= \Phi^u(t+s)(f)(p_0)\end{aligned}$$

因此

$$\Phi^u(t)\Phi^u(s)=\Phi^u(t+s)\quad \forall\ t,s\geqslant 0 \tag{6.7.2}$$

$$\Phi(0) = I$$

这表明算子族$\{\Phi(t)\}$，$t \geqslant 0$具有算子半群的性质。

由式(6.4.22)与式(6.4.23)得到解 $w(t)$的性质知道，$\forall\, t \geqslant 0$

$$\leqslant \|f\|_\delta E|p_{x_1}(t)-p_{x_2}(t)|^\delta \leqslant \|f\|_\delta (E|p_{x_1}(t)-p_{x_2}(t)|^2)^{\delta/2}$$
$$\leqslant \|f\|_\delta e^{r\delta t}|x_1-x_2|^\delta$$
证毕

依§6.4的假定(A_1)，$\forall\, u\in U$，$f(x,u)\equiv f_u\in H$。f_u视为C_1中的元：

$$f_u(x)=(f_u,x)\qquad \forall\, x\in H \tag{6.7.4}$$
$$|f_u|_H\leqslant C\qquad C\text{是一常数。}$$

取$\beta>r$，这里r满足不等式(6.4.23)中的r。在H中引入泛函类：

$$\mathscr{D}=\{S\,|\,S\in C_1, S\leqslant \int_0^t e^{-\beta\tau}\Phi^u(\tau)f_u\mathrm{d}\tau+e^{-\beta t}\Phi^u(t)S, \forall\, t\geqslant 0\} \tag{6.7.5}$$

引理6.10 算子半群$\{\Phi^u(t)\}$，$t\geqslant 0$具有性质

$$t\to \Phi^u(t)(f)(x)\in C[0,\infty)\quad \forall\, x\in H, \forall\, f\in C_1 \tag{6.7.6}$$

证 让$t_n\to t\,(n\to\infty)$，$t_n>t$。用§6.4的引理6.5的公式(6.4.25)，有

$$\begin{aligned}
p_x^u(t_n)&=T^u(t_n)x+\int_0^{t_n}T^u(t_n-s)(p_x^u(s)h)\cdot \mathrm{d}y_s\\
&=T^u(t_n-t)T^u(t)x+\int_0^t T^u(t_n-t)T^u(t-s)(p_x^u(s)h)\cdot \mathrm{d}y_s\\
&\quad+\int_t^{t_n}T^u(t_n-s)(p_x^u(s)h)\cdot \mathrm{d}y_s\\
&=T^u(t_n-t)\left\{T^u(t)x+\int_0^t T^u(t-s)(p_x^u(s)h)\cdot \mathrm{d}y_s\right\}\\
&\quad+\int_t^{t_n}T^u(t_n-s)(p_x^u(s)h)\cdot \mathrm{d}y_s\\
&=T^u(t_n-t)p_x^u(t)+\int_t^{t_n}T^u(t_n-s)(p_x^u(s)h)\cdot \mathrm{d}y_s
\end{aligned}$$

对上式右端的第一、二项有

$$E\,|T^u(t_n-t)p_x^u(t)-p_x^u(t)\|_H^2\leqslant C(t_n-t) \tag{6.7.7}$$

$$E\left|\int_t^{t_n}T^u(t_n-s)(p_x^u(s)h)\cdot \mathrm{d}y_s\right|_H^2\leqslant C(t_n-t) \tag{6.7.8}$$

如果$t_n<t$，可写为

$$p_x^n(t) = T^n(t-t_n)p_x^n(t_n) + \int_{t_n}^{t} T^*(t-s)(p_x^n(s)h)\cdot dy_s$$

$$E\| T^*(t-t_n)p_x^n(t_n) - p_x^n(t)\|_{V'}^2 = C(t-t_n) \qquad (6.7.9)$$

由式(6.7.7)、(6.7.8)和式(6.7.9),可得

$$E\| p_x^n(t_n) - p_x^n(t)\|_{V'}^2 \leqslant C|t-t_n| \qquad (6.7.10)$$

假定 $t_n>t$,用能量等式(6.4.20),有

$$Ee^{-2rt_n}|p_x^n(t_n)|^2 + 2E\int_t^{t_n} e^{-2rs}\langle A_0 p_x^n(s), p_x^n(s)\rangle ds$$

$$+ E\int_t^{t_n}\int_{R^k}(2r - \hat{a}(x,u(t)))(e^{-2rs}p_x^n(s))^2 dx ds$$

$$= Ee^{-2rt}|p_x^n(t)|^2$$

由此可得

$$|E|p_x^n(t_n)|^2 - E|p_x^n(t)|^2| = O|t_n - t| \qquad (6.7.11)$$

对$\forall\ \psi(\omega)\in L^2(\Omega,V)$,用式(6.7.10)得

$$|E\langle p_x^n(t_n) - p_x^n(t), \psi(\omega)\rangle|^2 \leqslant (E\|\psi(\omega)\|_V \| p_x^n(t_n) - p_x^n(t)\|_{V'}^2)^2$$

$$\leqslant E\|\psi(\omega)\|_V^2 E\| p_x^n(t_n) - p_x^n(t)\|_{V'}^2 \to 0 \quad (n\to\infty)$$

上式表明 $E\langle p_x^n(t_n)-p_x^n(t),\psi(\omega)\rangle$是 $L^2(\Omega,V)$上的连续线性泛函,$L^2(\Omega,V)$在 $L^2(\Omega,H)$中稠密,从而

$$E\langle p_x^n(t_n) - p_x^n(t), \psi(\omega)\rangle$$

可以延拓成为 $L^2(\Omega,H)$上的连续线性泛函。因此有

$$E(p_x^n(t_n),\psi) \to E(p_x^n(t),\psi)(n\to\infty)\forall\ \psi\in L^2(\Omega,H)$$
$$(6.7.12)$$

由式(6.7.11)和式(6.7.12),得

$$p_x^n(t_n) \to p_x^n(t)(n\to\infty) \text{ 在 } L^2(\Omega,H) \text{ 中} \qquad (6.7.13)$$

对$\forall\ f\in C_1$,$\forall\ x\in H$,则

$$(f(p_x^n(t))/(1+|p_x^n(t)|)) \in C$$

由式(6.7.13)得

$$|\Phi^n(t_n)(f)(x) - \Phi^n(t)(f)(x)| = |E[f(p_x^n(t_n)) - f(p_x^n(t))]|$$

$$= \left|E\left[\frac{(1+|p_x^n(t_n)|)f(p_x^n(t_n))}{1+|p_x^n(t_n)|} - \frac{(1+|p_x^n(t)|)f(p_x^n(t))}{1+|p_x^n(t)|}\right]\right| \to 0$$

$(n\to\infty)$ 证毕

现在由假定 $\beta>r$ 和引理 6.9，得

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}\Phi^u(t)f_u\mathrm{d}t \in C_1 \tag{6.7.14}$$

下面假定 U 是 R^r 中的紧子集。让 $h>0$ 是一个参数，定义 C_1 上的算子族：$\forall f\in C_1$

$$T_h(f) = \min_{u\in U}\left\{\int_0^h e^{-\beta t}\Phi^u(t)f_u\mathrm{d}t + e^{-\beta h}\Phi^u(h)(f)\right\} \tag{6.7.15}$$

上面定义的算子族 $\{T_h\}$，$h>0$ 具有性质：

$$\begin{aligned}
T_{2h}(f) &= \min_{u\in U}\left\{\int_0^h e^{-\beta t}\Phi^u(t)f_u\mathrm{d}t + \int_h^{2h} e^{-\beta t}\Phi^u(t)f_u\mathrm{d}t\right.\\
&\qquad \left. + e^{-\beta h}\Phi^u(2h)(f)\right\}\\
&= \min_{u\in U}\left\{\int_0^h e^{-\beta t}\Phi^u(t)f_u\mathrm{d}t + \int_0^h e^{-\beta(t+h)}\Phi^u(t+h)f_u\mathrm{d}t\right.\\
&\qquad \left. + e^{-2\beta h}\Phi^u(h)(f)\right\}\\
&= \min_{u\in U}\left\{\int_0^h e^{-\beta t}\Phi^u(t)f_u\mathrm{d}t\right.\\
&\qquad \left. + e^{-\beta h}\Phi^u(h)\left[\int_0^h e^{-\beta t}\Phi^u(t)f_u\mathrm{d}t + e^{-\beta h}\Phi^u(h)(f)\right]\right\}\\
&\geqslant \min_{u\in U}\left\{\int_0^h e^{-\beta t}\Phi^u(t)f_u\mathrm{d}t\right.\\
&\qquad \left. + e^{-\beta h}\Phi^u(h)\min_{u\in U}\left[\int_0^h e^{-\beta t}\Phi^u(t)f_u\mathrm{d}t + e^{-\beta h}\Phi^u(h)(f)\right]\right\}\\
&= T_hT_h(f)
\end{aligned} \tag{6.7.16}$$

现在假定映射

$$u\to f_u : U\to H \tag{6.7.17}$$

是连续和有界的。

引理 6.11 $\forall h>0$，算子 T_h 映 C_1 入 C_1。

证 当 $f\in C_1$ 时，首先证函数

$$\begin{aligned}
L_h^u(x) &= \int_0^h e^{-\beta t}\Phi^u(t)f_u(x)\mathrm{d}t + e^{-\beta h}\Phi^u(h)(f)(x)\\
&= \int_0^h e^{-\beta t}(f_u, Ep_x^u(t))\mathrm{d}t + e^{-\beta h}\Phi^u(h)(f)(x)
\end{aligned}$$

关于 u 连续。为此目的，只须证明映射

$$u \to p_\zeta^u(t) \quad \forall\, t \geqslant 0$$

是从 U 到 $L^2(\Omega,H)$ 是连续的。

让 $u_n, u \in U, u_n \to u(n \to \infty)$。用记号 $p_n(t) = p_\zeta^{u_n}(t), p(t) = p_\zeta^u(t)$。从能量等式(6.4.20)得到列 $\{p_n(\cdot)\}$ 是空间

$$L_y^2((0,T),V) \cap C([0,T],L^2(\Omega,H))$$

中的有界子集。

对 $\lambda(\cdot) \in L^\infty((0,T),R^m)$，令

$$\rho(t) = \exp\left\{\int_0^t \lambda(s) \cdot \mathrm{d}y_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\lambda(s)|^2 \mathrm{d}s\right\} \qquad (6.7.18)$$

对 $\zeta \in H$，考虑下面的方程

$$-\frac{\partial z_n}{\partial t} + A_0 z_n + \sum_{i=1}^k a_i(x,u_n)\frac{\partial z_n}{\partial x_i} = z_n h \cdot \lambda(t)$$

$$z_n(T,x) = \zeta(x)$$

$$z_n(\cdot) \in L^2((0,T),V), \frac{\partial z_n}{\partial t} \in L^2((0,T),V')$$

的解 z_n。

记 $a(x,u) = (a_1(x,u),\cdots,a_k(x,u))$。从算子 B^u 的定义有

$$(B^{u_n(\cdot)}p_n(t),z_n(t))_H = (\mathrm{div}(a(\cdot,u_n(t))p_n(t)),z_n(t))_H$$

$$= -(ap_n(t),\nabla z_n(t))_H = -(p_n(t),a(\cdot,u_n(t))\cdot\nabla z_n(t))_H$$

由此可得

$$\mathrm{d}(z_n(t),p_n(t)) = (\mathrm{d}z_n(t),p_n(t)) + (z_n(t),\mathrm{d}p_n(t))$$

$$= (A_0 z_n + \sum_{i=1}^k a_i(\cdot,u_n(t))\frac{\partial z_n}{\partial x_i} - z_n h \cdot \lambda(t),p_n(t))\mathrm{d}t$$

$$+ (z_n, -A_0 p_n \mathrm{d}t + B^{u_n(\cdot)}p_n \mathrm{d}t + p_n h \cdot \mathrm{d}y_t)$$

$$= -(z_n h \cdot \lambda(t),p_n(t))\mathrm{d}t + (z_n,p_n h)\cdot \mathrm{d}y_t$$

上面定义的 $\rho(t)$ 是指数鞅，用 Itô 公式容易验证

$$\mathrm{d}\rho(t) = \rho(t)\lambda(t)\cdot\mathrm{d}y_t$$

用上面的随机微分 $\mathrm{d}\rho(t)$，$\mathrm{d}(z_n(t),p_n(t))$ 和 Itô 微分公式，得

$$\mathrm{d}(\rho(t)(z_n(t),p_n(t))_H) = (z_n(t),p_n(t))_H\mathrm{d}\rho(t)$$

$$+ \rho(t)\mathrm{d}(z_n(t),p_n(t))_H + \mathrm{d}\rho(t)\mathrm{d}(z_n(t),p_n(t))_H$$

$$= (z_n(t),p_n(t))_H\rho(t)\lambda(t)\cdot\mathrm{d}y_t - \rho(t)(z_n(t)h\cdot\lambda(t),p_n(t))_H\mathrm{d}t$$

$$+ \rho(t)(z_n(t), p_n(t)h)_H \cdot \mathrm{d}y_t + \rho(t)\lambda(t) \cdot (z_n(t), p_n(t)h)_H \mathrm{d}t$$
$$= \rho(t)(z_n(t), (\lambda(t) + h)p_n(t))_H \cdot \mathrm{d}y_t$$

对上式两端从 0 到 T 积分，然后取数学期望，得

$$E\rho(T)(\zeta, p_n(T))_H = (x, z_n(0))_H \tag{6.7.19}$$

由 § 6.4 的条件(A_2)，$g(x,u)$关于 u 是连续的。因此，$a_i(x,u_n) \to a_i(x,u)(n\to\infty)(i=1,\cdots,k)$和

$z_n \to z(n \to \infty)$ 在 $L^2((0,T),V)$ 中弱收敛，

$\partial z_n/\partial t \to \partial z/\partial t(n \to \infty)$ 在 $L^2((0,T),V')$ 中弱收敛，

其中 z 是方程

$$-\frac{\partial z}{\partial t} + A_0 z + \sum_{i=1}^{k} a_i(x,u)\frac{\partial z}{\partial x_i} = z(t)h \cdot \lambda(t)$$
$$z(T,x) = \zeta(x)$$
$$z(\cdot) \in L^2((0,T),V), \frac{\partial z}{\partial t} \in L^2((0,T),V')$$

的解。

依式(6.7.19)和矢值函数的迹定理，得

$E\rho(T)(\zeta, p_n(T)) = (x, z_n(0)) \to (x, z(0)) = E\rho(T)(\zeta, p(T))$
$(n \to \infty)$

当 $\lambda(\cdot) \in L^\infty((0,T),R^m)$变化时，$\rho(T)$的线性组合的集在 $L^2(\Omega, \mathscr{F}_T, P)$中稠密。因此得

$p_n(T) \to p(T)(n\to\infty)$在空间 $L^2(\Omega, \mathscr{F}_T, P, H)$中弱收敛。

类似地，有

$p_n(t) \to p(t)(n\to\infty)$在空间 $L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P, H)$中弱收敛，$\forall t \geqslant 0$

从上式和式(6.7.18)，得

$$p_n \to p(n \to \infty) \text{ 在 } L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V) \text{ 中弱收敛。} \tag{6.7.20}$$

依 $p_n(t), p(t)$的定义，满足 Zakai 方程，于是有

$$\mathrm{d}(p_n - p) + A_0(p_n - p)\mathrm{d}t = B^{u_n}(p_n - p)\mathrm{d}t + (p_n - p)h \cdot \mathrm{d}y_t$$
$$+ (B^{u_n} - B)p\mathrm{d}t$$
$$(p_n - p)(0) = 0$$

对上面的(p_n-p)满足的方程和初始条件用能量等式

$$Ee^{-2rT}|p_n(T)-p(T)|^2+2E\int_0^T e^{-2rt}\langle A_0(p_n(s)-p(s)),(p_n(s)-p(s))\rangle ds+E\int_0^T\int_{R^k}(2r-\hat{a}(x,u_n))(p_n(t)-p(t))^2e^{-2rt}dxdt$$

$$=\sum_{i=1}^k E\int_0^T\int_{R^k}(a_i(x,u_n)-a_i(x,u))p\frac{\partial(p_n-p)}{\partial x_i}dxdt$$

由式(6.7.20),上式右端→0($n\to\infty$)。这就证明了映射

$$u\to p_r^u(\cdot):U\to L_2^2((0,T),V)\cap C([0,T],L^2(\Omega,H))$$

是连续映射。

特别地,∀ $t>0$,映射

$$u\to p_r^u(t):U\to L^2(\Omega,P,H) \qquad (6.7.21)$$

是连续的。

下面要证

$$E(f(p_n(h)))\to E(f(p(h)))(n\to\infty) \qquad (6.7.22)$$

泛函

$$G(x)=f(x)/(1+|x|)$$

是连续有界的。因此有

$$G(p_n(h))\to G(p(h))(n\to\infty)\text{ 在 }L^2(\Omega,P)\text{ 中收敛。}$$

用上面$G(x)$的定义,有

$$E(f(p_n(h)))=EG(p_n(h))(1+|p_n(h)|)$$

由上面已证$p_n(h)\to p(h)(n\to\infty)$在$L^2(\Omega,H)$中收敛。因此,式(6.7.22)成立。这就证明了

$$u\to e^{-\beta h}\Phi^u(h)(f)(x)$$

是连续映射。

由式(6.7.18)和式(6.7.21)已知,定义$L_h^u(x)$的积分项是连续地依赖于u。因此,映射

$$u\to L_h^u(x)$$

是从U到$L^2(\Omega,R^1)$是连续的。

由假定U是紧子集,在式(6.7.15)中的 min 有意义,依L_h^u的定义有

$$\frac{L_h^n(x)}{1+|x|}-\frac{L_h^n(x')}{1+|x'|}=\int_0^h e^{-\beta t}\Phi^n(t)\mathrm{d}t\left(\frac{f_n(x)}{1+|x|}-\frac{f_n(x')}{1+|x'|}\right)$$

$$+e^{-\beta h}\left[\frac{Ef(p_x^n(h))}{1+|x|}-\frac{Ef(p_{x'}^n(h))}{1+|x'|}\right]\triangleq X_1+X_2$$

记

$$\rho(\delta)=\sup_{|x-x'|\leqslant\delta}\left|\frac{f(x)}{1+|x|}-\frac{f(x')}{1+|x'|}\right|$$

则

$$|X_1|\leqslant C(\beta-r)^{-1}(1-e^{-(\beta-r)h})$$

$$|X_2|\leqslant e^{-\beta h}\left|E\left\{\frac{f(p_x^n(h))}{1+|p_x^n(h)|}-\frac{f(p_{x'}^n(h))}{1+|p_{x'}^n(h)|}\right\}\frac{1+|p_x^n(h)|}{1+|x|}\right|$$

$$+e^{-\beta h}\left|E\frac{f(p_{x'}^n(h))}{1+|p_{x'}^n(h)|}\left(\frac{1+|p_x^n(h)|}{1+|x|}-\frac{1+|p_{x'}^n(h)|}{1+|x'|}\right)\right|$$

$$\leqslant e^{-(\beta-r)h}\left\{\rho^2(\sqrt{|x-x'|})+\|f\|4e^{2rh}|x-x'|\right\}^{1/2}$$

$$+2e^{-(\beta-r)h}|x-x'| \tag{6.7.23}$$

上面的估计式右端与 n 无关，所以有

$$\left|\frac{T_h(f)(x)}{1+|x|}-\frac{T_h(f)(x')}{1+|x'|}\right|\leqslant\tilde{\rho}(|x-x'|)$$

其中 $\tilde{\rho}(|x-x'|)$ 表示不等式(6.7.23)的右端。这就证明了 $T_h(f)\times(x)/(1+|x|)$ 是一致连续的。

从 $T_h(f)(x)$ 的定义，有估计式

$$|T_h(f)(x)|\leqslant C(\beta-r)^{-1}(1-e^{-(\beta-r)h})|x|$$

$$+e^{-(\beta-r)h}|f|(1+|x|)$$

于是有

$$\|T_h(f)\|\leqslant C(\beta-r)^{-1}(1-e^{-(\beta-r)h})+e^{-(\beta-r)h}|f|$$

这就证明了 $T_h(f)\in C_1$　　证毕

引理 6.12　对每一 $h>0$，算子 $T_h:C_1\to C_1$ 是压缩映射。

证　依 $\Phi^n(h)(f)$ 的定义，有估计式

$$\|\Phi^n(h)(f_1)-\Phi^n(h)(f_2)\|\leqslant e^{rh}\|f_1-f_2\|_{C_1}$$

由算子 T_h 的定义和上面的估计式，得

$$\|T_h(f_1)-T_h(f_2)\|_{C_1}\leqslant e^{-(\beta-r)h}\|f_1-f_2\|_{C_1}$$

因为 $\beta>r$，从上面的不等式，T_h 是压缩映射。　　证毕

由上面证明的引理 6.11，当 $h>0$ 时，$T_h: C_1\to C_1$ 是压缩映射。因此，存在唯一 $S_h\in C_1$，使得

$$S_h = T_h(S_h), \forall\ h > 0 \tag{6.7.24}$$

引理 6.13　方程(6.7.24)的解 S_h 是一致 Lipschitz 连续的，并且

$$|S_h(x) - S_h(x')| \leqslant c(\beta - r)^{-1}|x - x'| \tag{6.7.25}$$

其中

$$c = \sup_{u\in U}|f_u|_H$$

证　对 $f\in C_1$，用引理 6.9(具有 $\delta=1$)，有

$$|\Phi^u(h)(f)(x) - \Phi^u(h)(f)(x')| \leqslant \|f\|_1 e^{rh}|x - x'|$$

由 T_h 的定义和上式，有

$$\|T_h(f)(x) - T_h(f)(x')| \leqslant (c(\beta - r)^{-1}(1 - e^{-(\beta-r)h}) + e^{-(\beta-r)h}\|f\|_1)|x - x'|$$

即

$$\|T_h(f)\|_1 \leqslant (c(\beta - r)^{-1}(1 - e^{-(\beta-r)h}) + e^{-(\beta-r)h}\|f\|_1)$$

由上式有

$$\|T_h(0)\|_1 \leqslant c(\beta - r)^{-1}(1 - e^{-(\beta-r)h})$$

约定

$$S_h^n = T_h^{(n)}(0)$$

则

$$\|S_h^n\|_1 \leqslant c(\beta - r)^{-1}(1 - e^{-(\beta-r)h})(1 + e^{-(\beta-r)h} + \cdots + e^{-(n-1)(\beta-r)h})$$

在上面的估计式中，令 $n\to\infty$，得

$$\|S_h\|_1 \leqslant c(\beta - r)^{-1}$$　　证毕

定理 6.10　在 § 6.4 的(A_1)，(A_2)，(A_3)和(A_4)的假定下，设 U 是紧集，$\beta>r$ 和(6.7.17)成立。则用式(6.7.5)定义的集类 $\mathscr{D}$ 是不空的，并且有一个最大元和 $\mathscr{D}$ 是一致 Lipschitz 的。

证　考虑元列$\{S_h\}$。如果

$$f \leqslant T_h(f) \Rightarrow f \leqslant S_h \tag{6.7.26}$$

事实上，令 $f_0=f,f_{n+1}=T_h(f_n)(n=0,1,\cdots)$。依引理 6.12，$T_h$ 是压缩映射，有 $f_n\to S_h(n\to\infty)$。因此，$T_h(S_h)=S_h$

由假设 $f\leqslant T_h(f)=f_1$，则 $f\leqslant T_h(f)\leqslant T_h(f_1)=f_2,\cdots,f\leqslant T_h(f)\leqslant T_h(f_1)\leqslant T_h(f_2)\leqslant\cdots\leqslant f_n$，从而 $f\leqslant S_h$

由式(6.7.16)，有

$$S_h = T_h(S_h) = T_hT_h(S_h) \leqslant T_{2h}(S_h) \tag{6.7.27}$$

在式(6.7.26)中，取 $f=S_h$。由式(6.7.27)已知，$S_h\leqslant T_{2h}(S_h)$。因此，式(6.7.26)的条件成立。故

$$S_h \leqslant S_{2h} \tag{6.7.28}$$

依 $\Phi^x(h)$的定义，有

$$\Phi^x(h)(f)(0) = 0 \quad \forall f$$

于是得

$$T_h(f)(0) = 0 \quad \forall f$$

所以，$S_h(0)=0$

由式 $S_h(0)=0$ 和式(6.7.25)，得

$$S_h(x) \geqslant - c(\beta - r)^{-1}|x|$$

为了书写简单，记 $S_q=S_{2^{-q}}$。由式(6.7.28)已知，列$\{S_h(x)\}$是关于 h 的单调下降有下界的列。因此，$q\to\infty$时，$S_q(x)\to\bar{S}(x)$。从引理 6.13 的式(6.7.25)得到 $\bar{S}$ 是 Lipschitz 的，即是

$$|\bar{S}(x) - \bar{S}(x')| \leqslant c(\beta - r)^{-1}|x - x'|$$

$$\bar{S}(0) = 0$$

因此，$\bar{S}\in C_1$。我们来证明 $\bar{S}$ 是类 $\mathscr{D}$ 的最大元。对每一个 $h>0$，算子 $T_h(f)$关于 f 是增的。由 $S_h=T_h(S_h)$，$\Rightarrow T_h^2(f)\leqslant T_{2h}(f)$，$\Rightarrow T_h^m(f)\leqslant T_{mh}(f)$，$\Rightarrow S_h=T_h^m(S_h)\leqslant T_{mh}(S_h)$。即是

$$S_h \leqslant \int_0^{mh} e^{-\beta t}\Phi^x(t)f_u\mathrm{d}t + e^{-mh\beta}\Phi^x(mh)S_h$$

$\forall$ 正整数 m。

现在取 $h=2^{-q}$，$m=j2^{q-l}$，使得 $l\leqslant q$，得

$$S_q \leqslant \int_0^{j2^{-l}} e^{-\beta t}\Phi^x(t)f_u\mathrm{d}t + e^{-\beta j2^{-l}}\Phi^x(j2^{-l})S_q \quad \forall\ l \leqslant q,$$

j 是正整数。 (6.7.29)

让 j,l 固定，依 Φ^u 的定义有

$$\Phi^u(j2^{-l})S_q(x) = ES_q(p_x^u(j2^{-l}))$$

令 $q\nearrow\infty$，用勒贝格收敛定理，在不等式(6.7.29)两端取极限，得

$$\bar{S} \leqslant \int_0^{j2^{-l}} e^{-\beta t}\Phi^u(t)f_u\mathrm{d}t + e^{-\beta j2^{-l}}\Phi^u(j2^{-l})\bar{S} \qquad (6.7.30)$$

现在取 $j=[t2^l+1]$ 和令 $l\to\infty$，因为 $j2^{-l}\to t(l\to\infty)$ 和 $\bar{S}\in C_1$，由引理 6.10，在式(6.7.30)中，当 $l\to\infty$ 时取极限，得

$$\bar{S} \leqslant \int_0^t e^{-\beta t}\Phi^u(t)f_u\mathrm{d}t + e^{-\beta t}\Phi^u(t)\bar{S}$$

这就证明了 $\bar{S}\in\mathscr{D}$。

对任一元 $\bar{S}\in\mathscr{D}$，依定义有 $\hat{S}\leqslant T_h(\hat{S})\quad\forall\ h>0$。由式(6.7.26)得 $\hat{S}\leqslant S_h,\forall\ h>0$。故 $\hat{S}\leqslant\bar{S}$ 从而 $\bar{S}$ 是类 $\mathscr{D}$ 中的最大元。 证毕

下面我们将讨论集类 $\mathscr{D}$ 的最大元与最优控制的值函数之间的关系。

考虑泛函

$$J_x(u(\cdot)) = E\int_0^\infty e^{-\beta t}(f_{u(t)},p_x^{u(\cdot)}(t))\mathrm{d}t \qquad (6.7.31)$$

其中 $u(\cdot)\in U_{ad}$ 是容许控制，$p_x^{u(\cdot)}(t)$ 是方程(6.4.6)的具有初始值 x 的解。

约定

$U_{st}=\{u(t)\,|\,u(t)\in U, a.e.\ t\in[0,T], a.s.,u(t)$ 对 $\{\mathscr{F}_t\}$ 是适过程，$u(t)$ 是 t 的阶段函数$\}$

即是，如果 $u(\cdot)\in U_{st}$，存在一个时间列 $\{\tau_n\}$，

$$\tau_0 = 0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n < \cdots,$$

$\tau_n\nearrow+\infty$，使得

$$u(t,\omega) = u_n(\omega), t\in[\tau_n,\tau_{n+1})$$

$u_n(\omega)$ 对 $\mathscr{F}_{\tau_n}$ 可测$(n=0,1,\cdots)$。

引理 6.14 设 $\varphi(\cdot)\in B, u(\cdot)\in U_{st}$。则对 $t\in[\tau_n,\tau_{n+1})$，有

$$E(\varphi(p_x^{u(\cdot)}(t))\,|\,\mathscr{F}_{\tau_n}) = \Phi^{u_n}(t-\tau)\varphi(p_x^{u(\cdot)}(\tau_n)) \quad (6.7.32)$$

证 对固定的 $\nu,\theta,u(\cdot)$ 参数，$q_{\nu,\theta}^{u(\cdot)}(t)$ 为方程(6.4.27)的解。对 $\tau_n\leqslant t<\tau_{n+1}$，用式(6.4.28)，有

$$p_x^{u(\cdot)}(t)=q_{p(\tau_n),\tau_n}^{u_n}(t-\tau_n)$$

对固定的参数 $\nu,u(\cdot)$，$q_{\nu,\theta}^{u(\cdot)}$ 与 $\mathscr{F}_t$ 独立。而 $u_n,p(\tau_n)$ 是 $\mathscr{F}_{\tau_n}$ 可测的，则

$$E(\varphi(p_x^{u(\cdot)}(t))\mid\mathscr{F}_{\tau_n})=E\left(\varphi(q_{\nu,\tau_n}^{u(\cdot)}(t-\tau_n))\Big|_{\substack{u(\cdot)=u_n\\ \nu=p_x(\tau_n)}}\right)$$

依 Φ^u 的定义，有

$$E(\varphi(q_{\nu,\tau_n}^{u(\cdot)}(t-\tau_n)))=\Phi^{u(\cdot)}(t-\tau_n)\varphi(\nu)$$

由上述两式，得

$$E(\varphi(p_x^{u(\cdot)}(t))\mid\mathscr{F}_{\tau_n})=\Phi^{u(\cdot)}(t-\tau_n)\varphi(\nu)\Big|_{\substack{u(\cdot)=u_n\\ \nu=p_x(\tau_n)}}$$

$$=\Phi_n^u(t-\tau_n)\varphi(p_x^{u(\cdot)}(\tau_n))$$ 证毕

对 $u(\cdot)\in U_{ad}$，记

$$p_n=p_n^{u(\cdot)}=p_x^{u(\cdot)}(\tau_n)$$

$$f_{h,u}=\int_0^h e^{-\beta t}\Phi^u(t)f_u\mathrm{d}t \qquad (6.7.33)$$

引理 6.14 的结果，可以推广到 $\varphi\in C_1$ 的情形。用引理 6.14，有

$$E\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}e^{-\beta(t-\tau_n)}(f_{u_n},p_x^{u(\cdot)}(t))\mathrm{d}t$$

$$=E\int_0^{\tau_{n+1}-\tau_n}e^{-\beta s}(f_{u_n},p_x^{u(\cdot)}(s+\tau_n))\mathrm{d}s$$

$$=E\int_0^{\tau_{n+1}-\tau_n}e^{-\beta s}(f_{u_n},E^{\mathscr{F}_{\tau_n}}p_x^{u(\cdot)}(s+\tau_n))\mathrm{d}s$$

$$=E\int_0^{\tau_{n+1}-\tau_n}e^{-\beta s}E^{\mathscr{F}_{\tau_n}}(f_{u_n},p_x^{u(\cdot)}(s+\tau_n))\mathrm{d}s$$

$$=E\int_0^{\tau_{n+1}-\tau_n}e^{-\beta s}\Phi^{u_n}(s)f_{u_n}(p_n)\mathrm{d}s$$

$$=E(f_{\tau_{n+1}-\tau_n,u_n},p_n)$$

因此，指标泛函(6.7.31)可写为

$$J_x(u(\cdot)) = E\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\tau_n}(f_{\tau_{n+1}-\tau_n,u_n}, p_n) \quad \forall\, u(\cdot) \in U_{ad}$$

(6.7.34)

考虑 U_{ad} 的子集

$$U_{ad}^h = \{u(t)\,|\,u(\cdot) \in U_{ad}, \tau_n = nh\}$$

定理 6.11 在定理 6.10 的假定下,成立

$$S_h(x) = \inf_{u(\cdot)\in U_{ad}^h} J_x(u(\cdot)) \tag{6.7.35}$$

证 设 $u(\cdot) \in U_{ad}^h$,有

$$J_x(u(\cdot)) = E\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\tau_n}(f_{h,u_n}, p_n)$$

依算子 T_h 的定义和 $S_h = T_h(S_h)$,得

$$S_h(x) \leqslant \int_0^h e^{-\beta s}\Phi^v(s)f_v(x)\mathrm{d}s + e^{-\beta h}\Phi^v(h)S_h(x)$$

取 $x = p_n, v = u_n$ 和由引理 6.14,有

$$\Phi^{u_n}(h)S_h(p_n) = E(S_h(p_{n+1})\,|\,\mathscr{F}_{nh})$$

则

$$Ee^{-\beta nh}S_h(p_n) \leqslant Ee^{-\beta(n+1)h}S_h(p_{n+1}) + Ee^{-\beta nh}(f_{h,u_n}, p_n)$$

对上式两端对 n 从 0 到 $N-1$ 求和,得

$$S_h(x) \leqslant E\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\beta nh}(f_{h,u_n}, p_n) + e^{-\beta Nh}S_h(p_N)\right)$$

因此

$$E|S_h(p_N)| \leqslant c(1 + E|p_N|) \leqslant c(1 + e^{N\gamma h})$$

令 $N \to \infty$,得

$$S_h(x) \leqslant J_x(u(\cdot))$$

由前面所述,S_h 是 T_h 的不动点,从引理 6.11 的证明,$L_h^v(x)$ 关于 v 是连续的,存在取值于 U 的 Borel 函数 $\hat{u}(x)$,使得

$$S_h(x) = \int_0^h e^{-\beta t}\Phi^{\hat{u}(\cdot)}(t)f_{\hat{u}}(x)\mathrm{d}t + e^{-\beta h}\Phi^{\hat{u}(\cdot)}(h)(S_h)(x)$$

$$\forall\, x \in H$$

令

$$\hat{u}_n = \hat{u}(p_n)$$

则 $\hat{u}(t,\omega)=\hat{u}_k(\omega)$，$t\in[\tau_k,\tau_{k+1})$，有 $\hat{u}(\cdot)\in U_{ad}^h$，并且

$$S_h(x)=J_x(\hat{u}(\cdot))$$

证毕

定理 6.12 在定理 6.10 的假定下，设 S 是集类 $\mathscr{S}$ 的最大元，则

$$S(x)=\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} J_x(u(\cdot))$$

证 对任给 $\varepsilon>0$，存在 $u^\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$J_x(u^\varepsilon(\cdot))<\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} J_x(u(\cdot))+\varepsilon$$

依第五章 §5.1 的引理 5.1，存在 $u_\eta^\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}^\eta$，使得

$$u_\eta^\varepsilon(\cdot)\to u^\varepsilon(\cdot)\ (\eta\to 0)\ 在\ L_y^2((0,T),R^r)\ 中收敛 \tag{6.7.36}$$

由此可得 $\forall\ T>0$ 固定，有

$$p^\eta(\cdot)\to p(\cdot)\ (\eta\to 0)\ 在\ L_y^2((0,T),V)\ 中收敛 \tag{6.7.37}$$

这里 $p^\eta(t)=p_{\eta}^{u_\eta^\varepsilon(\cdot)}(t)$，$p(t)$ 是相应于 $u^\varepsilon(\cdot)$ 的状态过程。

从能量等式(6.6.20)，可得

$$p^\eta(\cdot)\in L_y^2((0,T),V)\cap C([0,T],L^2(\Omega,H)) \tag{6.7.38}$$

并且

$$\mathrm{d}(p^\eta-p)+A(p^\eta-p)\mathrm{d}t-B^{u_\eta^\varepsilon(\cdot)}(p^\eta-p)\mathrm{d}t$$
$$=(B^{u_\eta^\varepsilon(\cdot)}-B^{u^\varepsilon(\cdot)})p\mathrm{d}t+(p^\eta-p)h\cdot\mathrm{d}y_t$$
$$(p^\eta-p)(0)=0$$

从这个 $(p^\eta-p)$ 满足的方程和初始条件，得能量等式

$$Ee^{-2rT}|(p^\eta-p)(T)|^2+2E\int_0^T e^{-2rt}\langle A_0(p^\eta-p)(s),(p^\eta-p)(s)\rangle\mathrm{d}s$$
$$+E\int_0^T\int_{R^k}(2r-\hat{a}(x,u_\eta^\varepsilon(t)))(p^\eta-p)^2(t)e^{-2rt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$=-\sum_{i=1}^k E\int_0^T\int_{R^k}(a_i(x,u_\eta^\varepsilon(t))-a_i(x,u^\varepsilon(t)))p\frac{\partial}{\partial x_i}(p^\eta-p)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{6.7.39}$$

但是

$$E\int_0^T\int_{R^k}(a_i(x,u_\eta^\varepsilon(t))-a_i(x,u^\varepsilon(t)))^2p^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to 0\quad(\eta\to 0)$$

由式(6.7.38)和式(6.7.17)，得

$$E\int_0^T (f_{u_\eta^\varepsilon(t)}, p^\eta(t))_H e^{-\beta t}\mathrm{d}t \to E\int_0^T (f_{u^\varepsilon(t)}, p(t))_H e^{-\beta t}\mathrm{d}t$$

$(\eta\to 0)\quad \forall\ T$

用关于$|p^\eta(t)|$的估计，可得

$$E|(f_{u_\eta^\varepsilon(t)}, p^\eta(t))_H| \leqslant ce^{\gamma t}$$

和 $\beta>\gamma$，使得

$$J_x(u_\eta^\varepsilon(\cdot)) \to J_x(u^\varepsilon(\cdot)) \quad (\eta\to 0)$$

存在 $\eta(\varepsilon)>0$，使得$\forall\ \eta\geqslant\eta(\varepsilon)$时，有

$$J_x(u_\eta^\varepsilon(\cdot)) \leqslant J_x(u^\varepsilon(\cdot)) + \varepsilon \leqslant \inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} J_x(u(\cdot)) + 2\varepsilon$$

由上所述，$u_\eta^\varepsilon(\cdot)\in U_{ad}^\eta$，依定理 6.11 得

$$S_\eta(x) \leqslant J_x(u_\eta^\varepsilon(\cdot)) \leqslant \inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} J_x(u(\cdot)) + 2\varepsilon$$

另一方面，$U_{ad}^\eta\subseteq U_{ad}$，所以

$$\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}^\eta} J_x(u(\cdot)) \geqslant \inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} J_x(u(\cdot))$$

依定理 6.11，对 $\varepsilon>0$，存在 $u_\eta(\cdot)\in U_{ad}^\eta$，使得

$$S_\eta(x) + \varepsilon > J_x(u_\eta(\cdot)) \geqslant \inf_{u(\cdot)\in U_{ad}^\eta} J_x(u(\cdot))$$

$$\geqslant \inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} J_x(u(\cdot))$$

从定理 6.10 的证明得 $S_\eta(x)\to S(x)\quad(\eta\to 0)$故

$$S(x) = \inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} J_x(u(\cdot))$$

证毕

第七章　随机分布参数系统的最优控制

在第六章，我们看到一个具有部分观测信息的随机系统的最优控制问题，归结成为一个用 Zakai 随机偏微分方程描述的随机分布参数系统的最优控制问题。弹性梁的随机振动系统也是随机分布参数系统。在很多领域中都出现随机分布参数系统和控制问题。在这一章我们讨论用随机发展方程描述的随机分布参数系统的最优控制问题。

§7.1　问题的叙述

设 V 和 H 是两个实的可分的 Hilbert 空间，V 是 H 的线性子空间和 V 在 H 中稠，从 V 到 H 的自然嵌入不变映射是连续的，记为 $V\hookrightarrow H$。视 H 同于它的对偶空间，用 V' 表示 V 的对偶空间。H 在 V' 中稠，H 到 V' 的自然嵌入不变映射是连续的。表示为 $V\hookrightarrow H\hookrightarrow V'$。$\forall x\in V, y\in V'$，用 $\langle x,y\rangle$ 表示 V 与 V' 的对偶积。当 $x,y\in H$ 时，$\langle x,y\rangle$ 就表示 H 中的内积。H 中的内积与范数分别用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 与 $|\cdot|$ 表示，V 与 V' 的范数分别用 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_*$ 表示。

设有算子族 $\{A(t)\}$，$t\in[0,T]$，$\forall t\in[0,T]$，$A(t):V\to V'$，使得 $A(t)\in\mathscr{L}(V,V')$，这里 $\mathscr{L}(V,V')$ 表示从 V 到 V' 的一切有界线性算子的空间。并且满足下面的条件：存在正常数 M,α,K 和 $p>\frac{1}{2}$ 以及非负常数 λ，使得

$$\|A(t)\|\leqslant M\quad\forall t\in[0,T]\tag{7.1.1}$$

$$\langle A(t)x,x\rangle+\lambda|x|^2\geqslant\alpha\|x\|^2\quad\forall x\in V, t\in[0,T]\tag{7.1.2}$$

$\forall\ x_1,x_2\in V$,映射 $t\to\langle A(t)x_1,x_2\rangle$ 是可测的,并且

$$|\langle (A(t)-A(s))x_1,x_2\rangle|\leqslant K|t-s|^{\mu}\|x_1\|\ \|x_2\|$$
$$\forall\ x_1,x_2\in V,\forall\ t,s\in[0,T] \tag{7.1.3}$$

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一个概率空间。$\{\mathscr{F}_t\},t\in[0,T]$ 是一个上升的、右连续的和对每一 $t\in[0,T]$,$\mathscr{F}_t$ 是完备的 $\mathscr{F}$ 的子 σ-域。

让 E 是一个实的可测的 Hilbert 空间,映射:$w_t(e,\omega):[0,\infty)\times E\times\Omega\to R^1$ 称为 E 上的柱 Wiener 过程,是指:$w_0(e,\cdot)=0\ \forall\ e\in E$,$w_t(e,\cdot)$ 对 $\mathscr{F}_t$ 可测和对任一 $e\in E,e\neq 0,w_t(e,\cdot)/\|e\|$ 是一维的 Wiener 过程,$\forall\ \lambda_1,\lambda_2\in R^1,w_t(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2,\cdot)=\lambda_1w_t(e_1,\cdot)+\lambda_2w_t(e_2,\cdot),\forall\ e_1,e_2\in E$。

假定,$\forall\ t\in[0,T],\mathscr{F}_t=\sigma(w_s;s\leqslant t)$,记 $\mathscr{F}=\{\mathscr{F}_t\}$。

设 U 是一个实的 Hilbert 空间,称为控制变量取值的空间,$U_{ad}\subset U$ 是一个非空的子集。已给映射 g,σ,f 和 h 如下:

$$g(\cdot,\cdot):H\times U_{ad}\to H$$
$$\sigma(\cdot):H\to\mathscr{L}^2(E,H)$$
$$f(\cdot,\cdot):H\times U_{ad}\to R^1$$
$$h(\cdot):H\to R^1$$

其中 $\mathscr{L}^2(E,H)$ 表示从 E 到 H 的 Hilbert—Schmidt 算子的全体,在 $\mathscr{L}^2(E,H)$ 上引入范数

$$\|A\|_2^2=\mathrm{tr}(A^*A)\quad\forall\ A\in\mathscr{L}^2(E,H)$$

则 $\mathscr{L}^2(E,H)$ 是一个 Hilbert 空间,trB 表示对称算子 B 的迹、$\mathscr{L}^2(E,H)$ 上的内积用《$\cdot,\cdot$》表示。

考虑下面的随机发展方程描述的随机系统的控制问题

$$dy(t)+A(t)y(t)dt=g(y(t),u(t))dt+\sigma(y(t))dw_t \tag{7.1.4}$$

$$y(0)=y_0$$
$$y(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V)\cap L^2(\Omega,C([0,T],H))$$

其中

$L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V)=\{z(t)\,|\,z(\cdot)\in L^2((0,T)\times\Omega,dtdP,V)$,$z(t)$ 对 σ-域族 $\{\mathscr{F}_t\},t\in[0,T]$ 适应和 $a.e.\ t,z(t)\in L^2(\Omega,P,V)\}$

受控系统(7.1.4)的性能指标

$$J(u(\cdot)) = E\left\{\int_0^T f(y(t),u(t))\mathrm{d}t + h(y(T))\right\} \qquad (7.1.5)$$

容许控制类

$\mathscr{U}_{ad}=\{u(t,\omega)\,|\,u(t,\omega)\in U_{ad}, a.e.\ t\in[0,T], a.s.\quad \forall\ t\in[0,T], u(t)$对$\mathscr{F}_t$是可测的，$\sup\limits_{0\le t\le T} E|u(t)|<\infty\}$

问题是求$u^*(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，使得

$$J(u^*(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}} J(u(\cdot))$$

称$u^*(\cdot)$为控制问题(7.1.4)—(7.1.5)的最优控制，相应于$u^*(\cdot)$的方程(7.1.4)的解$y^*(t)$称为最优轨道。任一$u(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$称为容许控制，相应于容许控制$u(t)$的方程(7.1.4)的解$y(t)$称为容许轨道。

§7.2 随机发展方程的解

定义空间

$L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H))=\{b(t)\,|\,\forall\ t\in[0,T], b(t)\in\mathscr{L}^2(E,H)$，对$\forall\ t\in[0,T]$作为随机元$b(t,\omega)$对$\mathscr{F}_t$可测，和积分$E\int_0^T\|b(t)\|_2^2\mathrm{d}t<\infty\}$

让$\{e_n; n=1,2,\cdots\}$是 Hilbert 空间E中的规范直交基，$\phi(t,\omega)$是一个在E中取值的对$\{\mathscr{F}_t\}, t\in[0,T]$适应的随机过程，使得

$$E\int_0^T|\phi(t,\omega)|^2\mathrm{d}t<\infty$$

我们定义随机过程$\phi(t,\omega)$关于柱 Wiener 过程w_t的随机积分为

$$\int_0^t\langle\phi(s),\mathrm{d}w_s\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t(\phi(s),e_n)\mathrm{d}w_s(e_n) \quad \forall\ t\in[0,T]$$

上式右端的积分是关于一维 Wiener 过程$\{w_s(e_n)\}$的通常的 Itô 积分。左端的随机积分是一个实值鞅。

对任一$b(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H))$定义$b(t)$关于柱 Wiener

过程$\{w_t\}$,$t\in[0,T]$的随机积分如下：

$$(h,\int_0^T b(t)\mathrm{d}w_t)_H = \int_0^T \langle b^*(t)h,\mathrm{d}w_t\rangle, P\text{-}a.s. \ \forall\, h \in H$$

其中$b^*(t)$是算子$b(t)$的伴随算子，用上式的右端来定义左端的积分。而右端的积分已在上面作了定义。因此积分

$$\int_0^T b(t)\mathrm{d}w_t$$

是$L^2(\Omega,P,H)$中的元。

设$a(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),H)$和$b(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H))$。考虑线性随机发展方程

$$\mathrm{d}\xi(t) + A(t)\xi(t)\mathrm{d}t = a(t)\mathrm{d}t + b(t)\mathrm{d}w_t \qquad (7.2.1)$$

$$\xi(0) = \xi_0$$

$$\xi(\cdot) \in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V) \cap L^2(\Omega,C([0,T],H))$$

如果算子族$\{A(t)\}$,$t\in[0,T]$满足条件(7.1.1)—(7.1.2)—(7.1.3)，则对任一$\xi_0\in H$，方程(7.2.1)存在唯一解$\xi(t)$,$t\in[0,T]$。并且成立下式

$$|\xi(t)|^2 + 2\int_0^t \langle A(s)\xi(s),\xi(s)\rangle\mathrm{d}s = |\xi_0|^2 + 2\int_0^t (\xi(s),a(s))\mathrm{d}s$$

$$+ 2\int_0^t (\xi(s),b(s)\mathrm{d}w_s) + \int_0^t \mathrm{tr}\,b^*(s)b(s)\mathrm{d}s, P\text{-}a.s.\ \forall\, t \in [0,T]$$

$$(7.2.2)$$

下面要讨论非线性随机发展方程(7.1.4)的解的存在唯一性问题。为此目的，假定

$$\forall\, \xi \in H, \forall\, u(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad}, g(\xi,u(\cdot)) \in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),H) \qquad (7.2.3)$$

$$\forall\, \xi(\cdot) \in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),H), \sigma(\xi(\cdot)) \in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H)) \qquad (7.2.4)$$

存在正常数c_1和c_2，使得$\forall\, \xi_1,\xi_2\in H$,$\forall\, u(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$时，有

$$|g(\xi_1,u(t)) - g(\xi_2,u(t))| \leqslant c_1|\xi_1 - \xi_2| \qquad (7.2.5)$$

$$\|\sigma(\xi_1) - \sigma(\xi_2)\|_2 \leqslant c_2|\xi_1 - \xi_2| \qquad (7.2.6)$$

定理 7.1 在假定式(7.1.1)、(7.1.2)、(7.1.3)和式(7.2.

3)、(7.2.4)、(7.2.5)、(7.2.6)成立时，$\forall\, u(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，存在唯一的随机过程，$y(t)$满足

$$y(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V)\cap L^2(\Omega,C([0,T],H))$$
$$dy(t)+A(t)y(t)dt=g(y(t),u(t))dt+\sigma(y(t))dw_t \tag{7.2.7}$$
$$y(0)=y_0\in H$$

其中 $y_0\in H$ 是任一给定的元。

证 用代换，将 $y(t)$变成 $y(t)e^{kt}$。因此方程(7.2.7)变为

$$dy(t)+(A(t)+kI)y(t)dt=g_1(y(t),t)dt+\sigma_1(y(t))dw_t \tag{7.2.8}$$
$$y(0)=y_0$$

其中 $\sigma_1(y(t))=\sigma(y(t)e^{kt}),g_1(y(t),t)=g(y(t)e^{kt},u(t))$

要证明方程(7.2.7)的存在唯一性问题，等价于证明方程(7.2.8)的存在唯一性问题。

设 $\zeta(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V)$，解关于 $y(t)$的线性随机发展方程

$$dy(t)+(A(t)+kI)y(t)dt=g_1(\zeta(t),t)dt+\sigma_1(\zeta(t))dw_t \tag{7.2.9}$$
$$y(0)=y_0$$
$$y(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V)\cap L^2(\Omega,C([0,T],H))$$

这个方程是方程(7.2.1)的类型。因此，对每一个 $\zeta(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V)$存在唯一的解 $y(t)$。这样定义了一个映射 $\zeta(\cdot)\to y(\cdot)$：$L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V)\to L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V)$。下面要证明这个映射是压缩映射。已给 $\zeta_1(\cdot),\zeta_2(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V)$，相应于 $\zeta_1(\cdot)$与 $\zeta_2(\cdot)$的方程(7.2.9)的解分别是 $y_1(t)$与 $y_2(t)$。用等式(7.2.2)，得

$$E|y_1(t)-y_2(t)|^2+2E\int_0^t\langle A(s)(y_1(s)-y_2(s)),$$
$$(y_1(s)-y_2(s))\rangle ds+2kE\int_0^t|y_1(s)-y_2(s)|^2ds$$
$$=2E\int_0^t(y_1(s)-y_1(s),g_1(\zeta_1(s),s)-g_1(\zeta_2(s),s))ds$$
$$+E\int_0^t\operatorname{tr}(\sigma_1(\zeta_1(s))-\sigma_1(\zeta_2(s)))^*(\sigma_1(\zeta_1(s))-\sigma_1(\zeta_2(s)))ds$$

用条件(7.1.2),由上式得

$$E|y_1(t)-y_2(t)|^2+2\alpha E\int_0^t\|y_1(s)-y_2(s)\|^2\mathrm{d}s$$

$$-2\lambda E\int_0^t|y_1(s)-y_2(s)|^2\mathrm{d}s+2kE\int_0^t|y_1(s)-y_2(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant 2c_1E\int_0^t|y_1(s)-y_2(s)||\zeta_1(s)-\zeta_2(s)|\mathrm{d}s$$

$$+c_2^2E\int_0^t|\zeta_1(s)-\zeta_2(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant c_1\varepsilon^{-\frac{1}{2}}E\int_0^t|\zeta_1(s)-\zeta_2(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$+c_1\varepsilon^{\frac{1}{2}}E\int_0^t\|y_1(s)-y_2(s)\|^2\mathrm{d}s+c_2^2E\int_0^t|\zeta_1(s)-\zeta_2(s)|^2\mathrm{d}s \tag{7.2.10}$$

让 $\theta\in(0,1)$。选择 $\varepsilon>0$,使得 $2\alpha=c_1\theta^{-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\triangleq\beta$。然后选择 $k>0$ 足够大,使得 $2(k-\lambda)-c_1\varepsilon^{\frac{1}{2}}\triangleq d>0$ 和 $d\beta^{-1}=c_2^2(\theta\beta)^{-1}$。由不等式(7.2.10)得

$$E\int_0^t\|y_1(s)-y_2(s)\|^2\mathrm{d}s+d\beta^{-1}E\int_0^t|y_1(s)-y_2(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\theta E\int_0^t\|\zeta_1(s)-\zeta_2(s)\|^2\mathrm{d}s+c_2^2(\theta\beta)^{-1}\theta E\int_0^t|\zeta_1(s)-\zeta_2(s)|^2\mathrm{d}s$$

约定 $\rho=d\beta^{-1}$,从上面的不等式得

$$E\int_0^t\|y_1(s)-y_2(s)\|^2\mathrm{d}s+\rho E\int_0^t|y_1(s)-y_2(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\theta E\int_0^t\|\zeta_1(s)-\zeta_2(s)\|^2\mathrm{d}s+\rho\theta E\int_0^t|\zeta_1(s)-\zeta_2(s)|^2\mathrm{d}s \tag{7.2.11}$$

在空间 V 中引入与 V 中的范数 $\|\cdot\|$ 等价的范数 $\|\cdot\|_\rho=(\|\cdot\|+\rho|\cdot|)^{\frac{1}{2}}$。由不等式(7.2.11)得

$$E\int_0^T\|y_1(s)-y_2(s)\|_\rho^2\mathrm{d}s\leqslant\theta E\int_0^T\|\zeta_1(s)-\zeta_2(s)\|_\rho^2\mathrm{d}s$$

但是 $\theta\in(0,1)$。上面的不等式证明了映射 $\zeta(\cdot)\to y(\cdot)$ 是连续和压缩的映射。因此存在唯一不动点 $y(\cdot)$ 满足方程(7.2.7)。

证毕

§7.3 轨道变分

假定：

(A_1) 设 $g(\xi,u)$ 对 (ξ,u) 连续，对变元 ξ 的 Gâteaux 导数存在和连续，导数记为 g_ξ。并且 g_ξ 有界，$|g_\xi(\xi,u)|\leqslant g_1$，$g_1$ 是正常数，$\forall u(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，$g(0,u(\cdot))\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),H)$。

(A_2) 设 $\sigma(\xi)$ 连续和 Gâteaux 连续可微，Gâteaux 导数 σ_ξ 有界，$\|\sigma_\xi(\xi)\|\leqslant\sigma_1\forall\ \xi\in H$，$\sigma_1$ 是正常数。

引理 7.1 在 (A_1) 和 (A_2) 的假定下，设 $\{u^{(i)}(t)\}(i=1,2,\cdots)$ 是容许控制列，$u^{(0)}(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，相应于 $\{u^{(i)}(t)\}$ 和 $u^{(0)}(t)$ 的容许轨道分别为 $\{y^{(i)}(t)\}$，$y^{(0)}(t)$，$t\in[0,T]$，如果 $u^{(i)}(t)\to u^{(0)}(t)(i\to\infty)$，$a.s.$，$a.e.\ t\in[0,T]$。则

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|y^{(i)}(t)-y^{(0)}(t)|^2\to 0(i\to\infty)$$

证 由假设 $y^{(i)}(t)$，$y^{(0)}(t)$ 分别是相应于容许控制 $u^{(i)}(t)$，$u^{(0)}(t)$ 的容许轨道，则有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(y^{(i)}(t)-y^{(0)}(t))+A(t)(y^{(i)}(t)-y^{(0)}(t))\mathrm{d}t\\
&=(g(y^{(i)}(t),u^{(i)}(t))-g(y^{(0)}(t),u^{(0)}(t)))\mathrm{d}t\\
&\quad+(\sigma(y^{(i)}(t))-\sigma(y^{(0)}(t)))\mathrm{d}w_t\\
&=(g(y^{(i)}(t),u^{(i)}(t))-g(y^{(0)}(t),u^{(i)}(t)))\mathrm{d}t\\
&\quad+(g(y^{(0)}(t),u^{(i)}(t))-g(y^{(0)}(t),u^{(0)}(t)))\mathrm{d}t\\
&\quad+(\sigma(y^{(i)}(t))-\sigma(y^{(0)}(t)))\mathrm{d}w_t\\
&=\int_0^1 g_\xi(y^{(0)}(t)+\lambda(y^{(i)}(t)-y^{(0)}(t)),u^{(i)}(t))(y^{(i)}(t)-y^{(0)}(t))\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}t\\
&\quad+(g(y^{(0)}(t),u^{(i)}(t))-g(y^{(0)}(t),u^{(0)}(t)))\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_0^1\sigma_\xi(y^{(0)}(t)+\lambda(y^{(i)}(t)-y^{(0)}(t)))(y^{(i)}(t)-y^{(0)}(t))\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}w_t
\end{aligned}\tag{7.3.1}$$

$$(y^{(i)}-y^{(0)})(0)=0$$

对随机微分方程(7.3.1)的解 $y^{(i)}(t)-y^{(0)}(t)$ 用 Itô 公式然后取数学期望，得

$$E|y^{(i)}(t)-y^{(0)}(t)|^2+2E\int_0^t\langle A(\tau)(y^{(i)}(\tau)-y^{(0)}(\tau)),$$

$$(y^{(i)}(\tau)-y^{(0)}(\tau))\rangle d\tau=2E\int_0^t\langle g(y^{(0)}(\tau),u^{(i)}(\tau))$$

$$-g(y^{(0)}(\tau),u^{(0)}(\tau)),y^{(i)}(\tau)-y^{(0)}(\tau)\rangle d\tau$$

$$+2E\int_0^t\langle\int_0^1\tilde{g}_\xi(y^{(i)}(\tau)-y^{(0)}(\tau))d\lambda,(y^{(i)}(\tau)-y^{(0)}(\tau))\rangle d\tau$$

$$+E\int_0^t \mathrm{tr}(\int_0^1\tilde{\sigma}_\xi\cdot(y^{(i)}(\tau)-y^{(0)}(\tau))d\lambda)^*$$

$$\times(\int_0^1\tilde{\sigma}_\xi\cdot(y^{(i)}(t)-y^{(0)}(t))d\lambda)d\tau$$

(7.3.2)

其中 $\tilde{g}_\xi=g_\xi(y^{(0)}(\tau)+\lambda(y^{(i)}(t)-y^{(0)}(\tau)),u^{(i)}(\tau))$，$\tilde{\sigma}_\xi=\sigma_\xi(y^{(0)}(\tau)+\lambda(y^{(i)}(\tau)-y^{(0)}(\tau)))$

用假定(A_1)，(A_2)和(7.1.2)，由式(7.3.2)得

$$E|y^{(i)}(t)-y^{(0)}(t)|^2+2\alpha E\int_0^t\|y^{(i)}(\tau)-y^{(0)}(\tau)\|^2d\tau$$

$$\leqslant 2\lambda E\int_0^t|y^{(i)}(\tau)-y^{(0)}(\tau)|^2d\tau$$

$$+2E\int_0^t|g(y^{(0)}(\tau),u^{(i)}(\tau))-g(y^{(0)}(\tau),u^{(0)}(\tau))|$$

$$\times|y^{(i)}(\tau)-y^{(0)}(\tau)|d\tau+2g_1E\int_0^t|y^{(i)}(\tau)-y^{(0)}(\tau)|^2d\tau$$

$$+E\int_0^t\|\int_0^1\tilde{\sigma}_\xi\cdot(y^{(i)}(\tau)-y^{(0)}(\tau))\|_2^2d\tau$$

$$\leqslant(2g_1+2\lambda+\sigma_1^2+1)E\int_0^t|y^{(i)}(\tau)-y^{(0)}(\tau)|^2d\tau$$

$$+E\int_0^t|g(y^{(0)}(\tau),u^{(i)}(\tau))-g(y^{(0)}(\tau),u^{(0)}(\tau))|^2d\tau$$

(7.3.3)

用 Gronwall's 不等式，存在正常数 c，使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|y^{(i)}(t)-y^{(0)}(t)|^2$$

$$\leqslant cE\int_0^T|g(y^{(0)}(t),u^{(i)}(t))-g(y^{(0)}(t),u^{(0)}(t))|^2dt\to 0$$

$(i\to\infty)$ 证毕

对任意的容许控制 $v(\cdot),u^*(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，考虑变分方程

$$\begin{aligned}dz(t)+A(t)z(t)dt&=g_\xi(y^*(t),u^*(t))z(t)dt+\sigma_\xi(y^*(t))z(t)dw_t\\&\quad+(g(y^*(t),v(t))-g(y^*(t),u^*(t)))dt\end{aligned} \tag{7.3.4}$$

$$z(0)=0$$

$$z(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V)\cap L^2(\Omega,C([0,T],H))$$

其中 $y^*(t),t\in[0,T]$ 是相应于容许控制 $u^*(t)$ 的容许轨道。变分方程(7.3.4)的解记为 $z(t)=z(t,v)$。

定理 7.2 在 (A_1) 和 (A_2) 的假定下，任一容许控制 $v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，$z(t,v)$ 是变分方程(7.3.4)的解，$\forall\ \varepsilon\in(0,1)$，存在容许控制 $u^\varepsilon(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，使得相应于 $u^\varepsilon(t),t\in[0,T]$ 的容许轨道 $y^\varepsilon(t)=y(t,u^\varepsilon(\cdot))$，成立下式

$$y^\varepsilon(t)=y^*(t)+\varepsilon z(t,v)+\varepsilon r_\varepsilon(t)\quad a.s.,a.e.\ t\in[0,T]$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|r_\varepsilon(t)|^2\to 0(\varepsilon\to 0)$$

证 算子族 $\{A(t)\},t\in[0,T]$ 满足条件式(7.1.1)、(7.1.2)和式(7.1.3)，因此存在有界线性算子族 $\{U(t,s)\},0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$。使得 $U(s,s)=I;U(t,\tau)U(\tau,s)=U(t,s),0\leqslant s\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T$。当 t 固定时，$U(t,s)$ 对 s 强连续，对 s 固定时，$U(t,s)$ 对 t 强连续和满足方程

$$\frac{d}{dt}U(t,s)+A(t)U(t,s)=0$$

用引理 1.2，$\forall\ \varepsilon\in(0,1)$，存在可测子集 $e_\varepsilon\subset[0,T]$，使得集 e_ε 的勒贝格测度 mes $e_\varepsilon=\varepsilon T$，并且

$$\begin{aligned}&\varepsilon\int_0^t U(t,s)(g(y^*(s),v(s))-g(y^*(s),u^*(s)))ds\\&=\int_{e_\varepsilon\cap[0,t]}U(t,s)(g(y^*(s),v(s))-g(y^*(s),u^*(s)))ds+a_\varepsilon(t)\end{aligned} \tag{7.3.5}$$

其中

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(t)|^2\to 0\quad(\varepsilon\to 0)$$

令

$$u^{\varepsilon}(t)=\begin{cases}v(t),\text{当 } t\in e_{\varepsilon}\\ u^{*}(t),\text{当 } t\notin e_{\varepsilon}\end{cases}$$

用 $y^{\varepsilon}(t), t\in[0,T]$表示相应于容许控制 $u^{\varepsilon}(t)$的容许轨道。令

$$r_{\varepsilon}(t)=\varepsilon^{-1}(y^{\varepsilon}(t)-y^{*}(t))-z(t,v)$$

则 $r_{\varepsilon}(0)=0$ 和 $r_{\varepsilon}(t)$满足下面的随机微分方程：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}r_{\varepsilon}(t)+A(t)r_{\varepsilon}(t)\mathrm{d}t &= \{\varepsilon^{-1}(g(y^{\varepsilon},u^{\varepsilon})-g(y^{*},u^{\varepsilon}))\\
&\quad -g_{\xi}(y^{*},u^{*})z(t,v)\}\mathrm{d}t+\{\varepsilon^{-1}(g(y^{*},u^{\varepsilon})\\
&\quad -g(y^{*},u^{*}))-(g(y^{*},v)-g(y^{*},u^{*}))\}\mathrm{d}t\\
&\quad +\{\varepsilon^{-1}(\sigma(y^{\varepsilon})-\sigma(y^{*}))-\sigma_{\xi}(y^{*})z(t,v)\}\mathrm{d}w_t\\
&=\varepsilon^{-1}\{g(y^{*}(t)+\varepsilon z(t)+\varepsilon r_{\varepsilon}(t),u^{\varepsilon}(t))\\
&\quad -g(y^{*}(t),u^{\varepsilon}(t))\}\mathrm{d}t-\{g_{\xi}(y^{*}(t),u^{*}(t))z(t,v)\mathrm{d}t\\
&\quad +\sigma_{\xi}(y^{*}(t))z(t,v)\mathrm{d}w_t\}+\varepsilon^{-1}\{g(y^{*}(t),u^{\varepsilon}(t))\\
&\quad -g(y^{*}(t),u^{*}(t))\}\mathrm{d}t-\varepsilon^{-1}\{\sigma(y^{*}(t)+\varepsilon z(t)+\varepsilon r_{\varepsilon}(t))\\
&\quad -\sigma(y^{*}(t))\}\mathrm{d}w_t-\{g(y^{*}(t),v(t))-g(y^{*}(t),u^{*}(t))\}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1 g_{\xi}(y^{*}(t)+\lambda\varepsilon(z(t)+r_{\varepsilon}(t)),u^{\varepsilon}(t))r_{\varepsilon}(t)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}t\\
&\quad +\int_0^1\sigma_{\xi}(y^{*}(t)+\lambda\varepsilon(z(t)+r_{\varepsilon}(t)))\mathrm{d}\lambda(r_{\varepsilon}(t)+z(t))\mathrm{d}w_t\\
&\quad +\int_0^1\{g_{\xi}(y^{*}(t)+\lambda\varepsilon(z(t)+r_{\varepsilon}(t)),u^{\varepsilon}(t))\\
&\quad -g_{\xi}(y^{*}(t),u^{*}(t))\}z(t,v)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}t\\
&\quad +\varepsilon^{-1}\{g(y^{*}(t),u^{\varepsilon}(t))-g(y^{*}(t),u^{*}(t))\}\mathrm{d}t\\
&\quad -\{g(y^{*}(t),v(t))-g(y^{*}(t),u^{*}(t))\}\mathrm{d}t\\
&\quad +\sigma_{\xi}(y^{*}(t))z(t,v)\mathrm{d}w_t
\end{aligned}\tag{7.3.6}$$

方程(7.3.6)写成下面的形式和用式(7.3.5)，得

$$\begin{aligned}
r_{\varepsilon}(t)&=\int_0^t U(t,s)\int_0^1 g_{\xi}(y^{*}(s)+\lambda\varepsilon(z(s)+r_{\varepsilon}(s)),u^{\varepsilon}(s))\mathrm{d}\lambda r_{\varepsilon}(s)\mathrm{d}s\\
&\quad +\int_0^t U(t,s)\int_0^1\sigma_{\xi}(y^{*}(s)+\lambda\varepsilon(z(s)+r_{\varepsilon}(s)))\mathrm{d}\lambda r_{\varepsilon}(s)\mathrm{d}w_s\\
&\quad +\int_0^t U(t,s)\int_0^1\{g_{\xi}(y^{*}(s)+\lambda\varepsilon(z(s)+r_{\varepsilon}(s)),u^{\varepsilon}(s))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- g_z(y^*(s), u^*(s))\} z(s,v) \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t U(t,s) \int_0^1 \{\sigma_z(y^*(s) + \lambda\varepsilon(z(s) + r_\varepsilon(s))) \\
&- \sigma_z(y^*(s))\} \mathrm{d}\lambda z(s,v) \mathrm{d}w_s \\
&+ \varepsilon^{-1} \int_0^t U(t,s) \{g(y^*(s), u^\varepsilon(s)) - g(y^*(s), u^*(s))\} \mathrm{d}s \\
&- \int_0^t U(t,s) \{g(y^*(s), v(s)) - g(y^*(s), u^*(s))\} \mathrm{d}s \\
= &\int_0^t U(t,s) \int_0^1 g_z(y^*(s) + \lambda\varepsilon(z(s) + r_\varepsilon(s)), u^\varepsilon(s)) \mathrm{d}\lambda r_\varepsilon(s) \mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t U(t,s) \int_0^1 \sigma_z(y^*(s) + \lambda\varepsilon(z(s) + r_\varepsilon(s))) \mathrm{d}\lambda r_\varepsilon(s) \mathrm{d}w_s \\
&+ \int_0^t U(t,s) \int_0^1 \{g_z(y^*(s) + \lambda\varepsilon(z(s) + r_\varepsilon(s)), u^\varepsilon(s)) \\
&- g_z(y^*(s), u^*(s))\} \mathrm{d}\lambda z(s,v) \mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t U(t,s) \int_0^1 \{\sigma_z(y^*(s) + \lambda\varepsilon(z(s) + r_\varepsilon(s))) \\
&- \sigma_z(y^*(s))\} \mathrm{d}\lambda z(s,v) \mathrm{d}w_s - \varepsilon^{-1} a_\varepsilon(t)
\end{aligned} \tag{7.3.7}
$$

式(7.3.7)的右端的前面四项之和用 $\tilde{r}_\varepsilon(t)$ 表示。于是 $r_\varepsilon(t) = \tilde{r}_\varepsilon(t) - \varepsilon^{-1} a_\varepsilon(t)$。过程 $\tilde{r}_\varepsilon(t)$ 满足 $\tilde{r}_\varepsilon(0) = 0$ 和下面的随机发展方程

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{r}_\varepsilon(t) + A(t)\tilde{r}_\varepsilon(t)\mathrm{d}t = &\int_0^1 g_z(y^*(t) + \lambda\varepsilon(z(t) + r_\varepsilon(t)), u^\varepsilon(t)) \mathrm{d}\lambda r_\varepsilon(t) \mathrm{d}t \\
&+ \int_0^1 \{g_z(y^*(t) + \lambda\varepsilon(z(t) + r_\varepsilon(t)), u^\varepsilon(t)) \\
&- g_z(y^*(t), u^*(t))\} \mathrm{d}\lambda z(t,v) \mathrm{d}t \\
&+ \int_0^1 \sigma_z(y^*(t) + \lambda\varepsilon(z(t) + r_\varepsilon(t))) \mathrm{d}\lambda r_\varepsilon(t) \mathrm{d}w_t \\
&+ \int_0^1 \{\sigma_z(y^*(t) + \lambda\varepsilon(z(t) + r_\varepsilon(t))) - \sigma_z(y^*(t))\} \mathrm{d}\lambda z(t,v) \mathrm{d}w_t
\end{aligned} \tag{7.3.8}
$$

对满足随机发展方程(7.3.8)的解 $\tilde{r}_\varepsilon(t)$ 用 Itô 公式，然后取数学期望，得

$$
E|r_\varepsilon(t)|^2 + 2E\int_0^t \langle A(s)\tilde{r}_\varepsilon(s), r_\varepsilon(s) \rangle \mathrm{d}s
$$

$$= 2E\int_0^t \langle \int_0^1 g_\xi(y^*(s) + \lambda\varepsilon(z(s) + r_\varepsilon(s)), u^\varepsilon(s)) \mathrm{d}\lambda r_\varepsilon(s), r_\varepsilon(s) \rangle \mathrm{d}s$$

$$+ 2E\int_0^t \langle \int_0^1 (g_\xi(y^*(s) + \lambda\varepsilon(z(s) + r_\varepsilon(s)), u^\varepsilon(s))$$

$$- g_\xi(y^*(s), u^*(s))) \mathrm{d}\lambda z(s,v), r_\varepsilon(s) \rangle \mathrm{d}s$$

$$+ E\int_0^t \mathrm{tr}\Big\{\Big[\int_0^1 (\hat{\sigma}_\xi(s) r_\varepsilon(s) + (\hat{\sigma}_\xi(s) - \sigma_\xi(y^*(s))) z(s,v)) \mathrm{d}\lambda\Big]^*$$

$$\times \Big[\int_0^1 (\hat{\sigma}_\xi(s) r_\varepsilon(s) + (\hat{\sigma}_\xi(s) - \sigma_\xi(y^*(s))) z(s,v)) \mathrm{d}\lambda\Big] \mathrm{d}s \tag{7.3.9}$$

其中 $\hat{\sigma}_\xi(s) = \sigma_\xi(y^*(s) + \lambda\varepsilon(z(s) + r_\varepsilon(s)))$

令

$$A(s) = \int_0^1 \hat{\sigma}_\xi(s) r_\varepsilon(s) \mathrm{d}\lambda$$

$$B(s) = \int_0^1 (\hat{\sigma}_\xi(s) - \sigma_\xi(y^*(s))) z(s,v) \mathrm{d}\lambda$$

则

$$\mathrm{tr}((A(s) + B(s))^*(A(s) + B(s)) = \| (A(s) + B(s)) \|_2^2$$

$$\leqslant 2\| A(s) \|_2^2 + 2\| B(s) \|_2^2 \leqslant 2\sigma_1^2 |r_\xi(s)|^2$$

$$+ 2\| \hat{\sigma}_\xi(s) - \sigma_\xi(y^*(t)) \|_2^2 |z(s,v)|^2 \tag{7.3.10}$$

由式(7.3.9)和不等式(7.3.10),得

$$E|\bar{r}_\varepsilon(t)|^2 + 2\alpha E\int_0^t \| \bar{r}_\varepsilon(s) \|^2 \mathrm{d}s \leqslant 2\lambda E\int_0^t |\bar{r}_\varepsilon(s)|^2 \mathrm{d}s + g_1 E\int_0^t |r_\varepsilon(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$+ g_1 E\int_0^t |\bar{r}_\varepsilon(s)|^2 \mathrm{d}s + E\int_0^t |\bar{r}_\varepsilon(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$+ E\int_0^t \Big| \int_0^1 (g_\xi(y^*(s) + \lambda\varepsilon(z(s) + r_\varepsilon(s)), u^\varepsilon(s))$$

$$- g_\xi(y^*(s), u^*(s))) \mathrm{d}\lambda \Big|^2 |z(s,v)|^2 \mathrm{d}s$$

$$+ 2\sigma_1^2 E\int_0^t |r_\varepsilon(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$+ 2E\int_0^t \Big\| \int_0^1 (\hat{\sigma}_\xi(s) - \sigma_\xi(y^*(s))) \mathrm{d}\lambda \Big\|_2^2 |z(s,v)|^2 \mathrm{d}s \tag{7.3.11}$$

注意到 $r_\varepsilon(s)=\tilde{r}_\varepsilon(s)-\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(s)$，用 Gronwall's 不等式，从式(7.3.11)存在正常数 c_1，c_2 和 c_3，使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|\tilde{r}_\varepsilon(t)|^2\leqslant c_1E\int_0^T\left\|\int_0^1(\hat{\sigma}_\xi(y^*(s)+\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s)))\right.$$

$$\left.-\sigma_\xi(y^*(s)))\mathrm{d}\lambda\right\|_2^2|z(s,v)|^2\mathrm{d}s$$

$$+c_2E\int_0^T\left|\int_0^1\{g_\xi(y^*(s)+\lambda\varepsilon(z(s)+r_\varepsilon(s)),u^\varepsilon(s))\right.$$

$$\left.-g_\xi(y^*(s),u^*(s))\right\}\mathrm{d}\lambda\Big|^2|z(s,v)|^2\mathrm{d}s$$

$$+c_3E\int_0^T|\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(s)|^2\mathrm{d}s\to0(\varepsilon\to0)$$

因此

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|r_\varepsilon(t)|^2\leqslant2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|\tilde{r}_\varepsilon(t)|^2+2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|\varepsilon^{-1}a_\varepsilon(t)|^2\to0(\varepsilon\to0)$$

证毕

§7.4 最大值原理

在这一节，我们将证明对于控制问题(7.1.4)—(7.1.5)的最优控制满足的必要条件最大值原理。

假定

(A_3) 设 $f(\xi,u)$ 对 (ξ,u) 连续，对变元 ξ 是 Gâteaux 可微的，Gâteaux 导数 $f_\xi(\xi,u)$ 对 (ξ,u) 连续和有界，$|f_\xi(\xi,u)|\leqslant f_1$，$f_1$ 是正常数。

(A_4) 设 $h(\xi)$ 的 Gâteaux 导数 $h_\xi(\xi)$ 连续和有界，$|h_\xi(\xi)|\leqslant h_1$，$h_1$ 是正常数。

定理 7.3 设算子族 $\{A(t)\}$ 满足条件(7.1.1)、(7.1.2)和式(7.1.3)，映射 g,σ,f 和 h 满足条件 (A_1)，(A_2)，(A_3) 和 (A_4)，U_{ad} 是闭子集。$u^*(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$ 是控制问题(7.1.4)—(7.1.5)的最优控制，$y^*(t)$，$t\in[0,T]$ 是相应于最优控制 $u^*(\cdot)$ 的最优轨道，对任一容许控制 $v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，$z(t,v)$ 是变分方程(7.3.4)的解，则

$$E\int_0^T \langle f_y(y^*(t),u^*(t)),z(t,v)\rangle \mathrm{d}t + E\langle h_y(y^*(T)),z(T,v)\rangle$$

$$+ E\int_0^T \{f(y^*(t),v(t)) - f(y^*(t),u^*(t))\}\mathrm{d}t \geqslant 0 \quad (7.4.1)$$

证 令 $S=\mathscr{U}_{ad}$。$\forall\ u(\cdot),v(\cdot)\in S$，定义

$$\rho(u(\cdot),v(\cdot)) = E\int_0^T \frac{|u(t)-v(t)|}{1+|u(t)-v(t)|}\mathrm{d}t$$

其中$|\cdot|$表示空间U上的范数。

上面定义的$\rho(\cdot,\cdot)$是S上的距离，(S,ρ)是一个完备的距离空间。依距离ρ的收敛等价于依测度$\mathrm{d}t\mathrm{d}P$收敛。

考虑在空间(S,ρ)上定义泛函$J^\varepsilon(v(\cdot))$如下：

$$J^\varepsilon(v(\cdot))=\{(J(v(\cdot))-J(u^*(\cdot))+\varepsilon)^2+(J(v(\cdot))-J(u^*(\cdot)))^2\}^{1/2}$$

其中泛函$J(v(\cdot))$用式(7.1.5)定义。

显然

$$0 < \inf_{v(\cdot)\in S} J^\varepsilon(v(\cdot)) \leqslant J^\varepsilon(u^*(\cdot)) = \varepsilon$$

$$J^\varepsilon(u^*(\cdot)) < \inf_{v(\cdot)\in S} J^\varepsilon(v(\cdot)) + \varepsilon$$

用引理1.1，存在$u^\varepsilon(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，使得

$$J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot)) \leqslant J^\varepsilon(u^*(\cdot))$$

$$\rho(u^\varepsilon(\cdot),u^*(\cdot)) \leqslant \varepsilon^{1/2} \quad (7.4.2)$$

$$J^\varepsilon(v(\cdot)) \geqslant J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot)) - \varepsilon^{1/2}\rho(u^\varepsilon(\cdot),v(\cdot)) \quad \forall\ v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad} \quad (7.4.3)$$

对任一容许控制$v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，依定理7.1，存在可测子集$e_\lambda\subset[0,T]$和$u_\lambda^\varepsilon(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，使得

$$\text{mes } e_\lambda = \lambda T$$

$$u_\lambda^\varepsilon(t) = \begin{cases} v(t)，当\ t\in e_\lambda \\ u^\varepsilon(t)，当\ t\in[0,T]\backslash e_\lambda \end{cases}$$

$$y_\lambda^\varepsilon(t) = y^\varepsilon(t) + \lambda z^\varepsilon(t,v) + \lambda r_\lambda^\varepsilon(t), a.s., a.e. t$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|r_\lambda^\varepsilon(t)|^2 \to 0(\lambda\to 0)$$

$$\lambda\int_0^T \{f(y^\varepsilon(t),v(t)) - f(y^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{e_\lambda} \{f(y^r(t), v(t)) - f(y^r(t), u^r(t))\} dt + o(\lambda)$$

(7.4.4)

其中 $o(\lambda)/\lambda \to 0(\lambda \to 0)$, $y^r(t)$, $y_\lambda^r(t)$ 分别是相应于容许控制 $u^r(t)$, $u_\lambda^r(t)$ 的容许轨道；$z^r(t,v)$ 是变分方程

$$dz^r(t) + A(t)z^r(t)dt = g_z(y^r(t), u^r(t))z^r(t)dt$$

$$+ \sigma_z(y^r(t))z^r(t)dw_t + (g(y^r(t), v(t)) - g(y^r(t), u^r(t)))dt$$

(7.4.5)

$$z^r(0) = 0$$

的解。

下面计算泛函 $J(v(\cdot))$ 在点 $u_\lambda^r(\cdot)$ 与 $u^r(\cdot)$ 的值之差

$$J(u_\lambda^r(\cdot)) - J(u^r(\cdot)) = E\int_0^T \{f(y_\lambda^r(t), u_\lambda^r(t)) - f(y^r(t), u^r(t))\} dt$$

$$+ E\{h(y_\lambda^r(T)) - h(y^r(T))\}$$

$$= E\int_0^T \{f(y^r(t) + \lambda(z^r(t) + r_\lambda^r(t)), u_\lambda^r(t)) - f(y^r(t), u_\lambda^r(t))\} dt$$

$$+ E\int_0^T \{f(y^r(t), u_\lambda^r(t)) - f(y^r(t), u^r(t))\} dt$$

$$+ E\{h(y^r(T) + \lambda z^r(T) + \lambda r_\lambda^r(T)) - h(y^r(T))\}$$

$$= \lambda E\int_0^T \langle f_z(y^r(t), u_\lambda^r(t)), z^r(t)\rangle dt + \lambda E\langle h_z(y^r(T)), z^r(T)\rangle$$

$$+ E\int_{e_\lambda} \{f(y^r(t), v(t)) - f(y^r(t), u^r(t))\} dt + o(\lambda)$$

$$= \lambda E\int_0^T \langle f_z(y^r(t), u_\lambda^r(t)), z^r(t)\rangle dt + \lambda E\langle h_z(y^r(T)), z^r(T)\rangle$$

$$+ \lambda E\int_0^T \{f(y^r(t), v(t)) - f(y^r(t), u^r(t))\} dt + o(\lambda)$$

(7.4.6)

依距离 $\rho(\cdot,\cdot)$ 的定义，有

$$\rho(u_\lambda^r(\cdot), u^r(\cdot)) = E\int_0^T \frac{|u_\lambda^r(t) - u^r(t)|}{1 + |u_\lambda^r(t) - u^r(t)|} dt$$

$$= E\int_{e_\lambda} \frac{|v(t) - u^r(t)|}{1 + |v(t) - u^r(t)|} dt$$

$$\leqslant E\int_{e_\lambda} \mathrm{d}t = \text{mes } e_\lambda = \lambda T \tag{7.4.7}$$

令

$$p(\varepsilon)=\frac{(J(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot))+\varepsilon)+(J(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot)))}{\{(J(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot))+\varepsilon)^2+(J(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot)))^2\}^{1/2}}$$

用第一章的§1.2的引理1.3,由式(7.4.6)、(7.4.7)和式(7.4.3),得

$$J^\varepsilon(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot)) = p(\varepsilon)(J(u_\lambda^\varepsilon(\cdot)) - J(u^\varepsilon(\cdot))) + o(\lambda)$$

$$= \lambda p(\varepsilon)\left\{E\int_0^T \langle f_\xi(y^\varepsilon(t),u_\lambda^\varepsilon(t)),z^\varepsilon(t)\rangle \mathrm{d}t + E\langle h_\xi(y^\varepsilon(T)),z^\varepsilon(T)\rangle\right.$$

$$\left. + E\int_0^T (f(y^\varepsilon(t),v(t)) - f(y^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t)))\mathrm{d}t\right\} + o(\lambda)$$

$$\geqslant -\varepsilon^{1/2}\rho(u_\lambda^\varepsilon(\cdot),u^\varepsilon(\cdot)) \geqslant -\varepsilon^{1/2}\lambda T \tag{7.4.8}$$

依式(7.4.7),$\rho(u_\lambda^\varepsilon(\cdot),u^\varepsilon(\cdot))\to 0(\lambda\to 0)$。这等价于$u_\lambda^\varepsilon(t)$依测度$\mathrm{d}t\mathrm{d}P$收敛于$u^\varepsilon(t)$。从而可选出子列$u_{\lambda_i}^\varepsilon(t)\to u^\varepsilon(t)(\lambda_i\to 0, i\to\infty)$a.s.,a.t.。用假设$(A_3)$,得

$$E\int_0^T \langle f_\xi(y^\varepsilon(t),u_{\lambda_i}^\varepsilon(t)),z^\varepsilon(t)\rangle \mathrm{d}t \to E\int_0^T \langle f_\xi(y^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t)),z^\varepsilon(t)\rangle \mathrm{d}t,$$

$$(i\to\infty) \tag{7.4.9}$$

在式(7.4.8)中用λ_i代替λ后,两端用$\lambda_i>0$除,再令$i\to\infty$,得

$$p(\varepsilon)\left\{E\int_0^T \langle f_\xi(y^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t)),z^\varepsilon(t)\rangle \mathrm{d}t + E\langle h_\xi(y^\varepsilon(T)),z^\varepsilon(T)\rangle\right.$$

$$\left. + E\int_0^T (f(y^\varepsilon(t),v(t)) - f(y^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t)))\mathrm{d}t\right\} \geqslant -\varepsilon^{1/2}T$$

$$\tag{7.4.10}$$

用简单的关系式:若$a\geqslant 0, b\geqslant 0, a+b>0$,则$1\leqslant(a+b)^2(a^2+b^2)^{-1}\leqslant 2$。取$a=(J(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot))+\varepsilon)$,$b=(J^\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot)))$,依$p(\varepsilon)$的定义,用上面的简单的不等式得$1\leqslant p^2(\varepsilon)\leqslant 2$。由假设$u^*(\cdot)$是最优控制,$J(u^\varepsilon(\cdot))-J(u^*(\cdot))\geqslant 0$,$\forall\ \varepsilon\in(0,1)$。因此$p(\varepsilon)\geqslant 1$。数集$\{p(\varepsilon)\}$,$\varepsilon\in(0,1)$是有界集。可选出一收敛子列,$p(\varepsilon_i)\to p_0(\varepsilon_i\to 0, i\to\infty)$,并且$p_0\geqslant 1$。

由式(7.4.2)，$\rho(u^{\varepsilon}(\cdot),u^*(\cdot))\to 0(\varepsilon\to 0)$，存在子列 $u^{\varepsilon_i}(t)\to u^*(t)(\varepsilon_i\to 0,i\to\infty)$，a.s.，a.e. t。依引理 7.1 得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|y^{\varepsilon_i}(t)-y^*(t)|^2\to 0\quad(i\to\infty)$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|z^{\varepsilon_i}(t,v)-z(t,v)|^2\to 0\quad(i\to\infty)$$

由式(7.4.10)，用 ε_i 代替 ε 后，令 $i\to\infty$，得

$$p_0\Big\{E\int_0^T\langle f_\xi(y^*(t),u^*(t)),z(t,v)\rangle\mathrm{d}t+E\langle h_\xi(y^*(T)),z(T,v)\rangle$$

$$+E\int_0^T(f(y^*(t),v(t))-f(y^*(t),u^*(t)))\mathrm{d}t\Big\}\geqslant 0$$

因为 $p_0\geqslant 1$，由上式得不等式(7.4.1)。　　证毕

定理 7.4　在定理 7.3 的条件下，设 $u^*(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$ 是控制问题(7.1.4)—(7.1.5)的最优控制，$y^*(t),t\in[0,T]$ 是相应于 $u^*(\cdot)$ 的最优轨道，则存在随机过程 $(\psi(\cdot),\Psi(\cdot))\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),H)\times L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H))$，使得四元组 $(y^*(t),\psi(t),\Psi(t),u^*(t))$ 满足

(1)随机发展方程

$$\mathrm{d}y^*(t)+A(t)y^*(t)\mathrm{d}t=g(y^*(t),u^*(t))\mathrm{d}t+\sigma(y^*(t))\mathrm{d}w_t \tag{7.4.11}$$

$$y^*(0)=y_0$$

$$-\mathrm{d}\psi(t)+A^*(t)\psi(t)\mathrm{d}t=\{-f_\xi(y^*(t),u^*(t))+g_\xi^*(y^*(t),u^*(t))\psi(t)$$
$$-\sigma_\xi^*(y^*(t))\Psi(t)\}\mathrm{d}t+\Psi(t)\mathrm{d}w_t \tag{7.4.12}$$

$$\psi(T)=-h_\xi(y^*(T))$$

(2)最大值原理

$$\max_{u\in U_{ad}}H(y^*(t),\psi(t),u)=H(y^*(t),\psi(t),u^*(t)),\ \text{a.s.},\text{a.e.}\ t\in[0,T] \tag{7.4.13}$$

其中 $A^*(t),g_\xi^*,\sigma_\xi^*$ 分别表示算子 $A(t),g_\xi$ 和 σ_ξ 的伴随算子和 Hamiltonian 泛函

$$H(y,\psi,u)=-f(y,u)+(\psi,g(y,u))_H$$

证　对 $\forall(\phi,\Phi)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V')\times L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H))$，考

虑线性随机发展方程

$$d\rho(t) + A(t)\rho(t)dt = (g_\xi(y^*(t),u^*(t))\rho(t) + \phi(t))dt + (\sigma_\xi(y^*(t))\rho(t) + \Phi(t))dw_t \quad (7.4.14)$$

$$\rho(0) = 0$$

方程(7.4.14)存在唯一解

$$\rho(\cdot) \in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V) \cap L^2(\Omega, C([0,T],H))$$

这样就定义了一个映射$(\phi,\Phi) \to \rho(\cdot)$是从空间

$$L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V') \times L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H))$$

到空间$L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V)$的线性连续映射。因此泛函

$$\mathscr{L}(\phi,\Phi) = E\left\{\int_0^T \langle f_\xi(y^*(t),u^*(t)),\rho(t)\rangle dt + \langle h_\xi(y^*(T)),\rho(T)\rangle\right\}$$

是空间

$$L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V') \times L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H))$$

上的连续线性泛函，由 Hilbert 空间中的 Rieze's 表现定理，存在唯一元素对$(\dot{\psi}(t),\Psi(t))$：

$$(\dot{\psi}(\cdot),\Psi(\cdot)) \in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V) \times L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H))$$

使得

$$E\left\{\int_0^T \langle f_\xi(y^*(t),u^*(t)),\rho(t)\rangle dt + \langle h_\xi(y^*(T)),\rho(T)\rangle\right\}$$
$$= E\int_0^T \langle \dot{\psi}(t),\phi(t)\rangle dt + E\int_0^T \langle\langle \Psi(t),\Phi(t)\rangle\rangle dt$$
$$\forall\ (\phi(\cdot),\Phi(\cdot)) \in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V') \times L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H)) \quad (7.4.15)$$

在方程(7.4.14)中，取$\phi(t) = g(y^*(t),v(t)) - g(y^*(t),u^*(t))$、$\Phi(t) \equiv 0$。此时方程(7.4.14)就是变分方程(7.3.4)。因此$\rho(t) = z(t,v)$。把这样取定的$\phi(t) = g(y^*(t),v(t)) - g(y^*(t),u^*(t))$，$\Phi(t) \equiv 0$，$\rho(t) = z(t,v)$代入式(7.4.15)，得

$$E\left\{\int_0^T \langle f_\xi(y^*(t),u^*(t)),z(t,v)\rangle dt + \langle h_\xi(y^*(T)),z(T,v)\rangle\right\}$$
$$= E\int_0^T (\dot{\psi}(t),g(y^*(t),v(t)) - g(y^*(t),u^*(t)))_H dt \quad (7.4.16)$$

在本定理的条件下，定理 7.3 的式(7.4.1)成立。将式(7.4.16)代入不等式(7.4.1)，得

$$E\int_0^T(\hat{\psi}(t),g(y^*(t),v(t))-g(y^*(t),u^*(t)))\mathrm{d}t$$

$$+E\int_0^T(f(y^*(t),v(t))-f(y^*(t),u^*(t)))\mathrm{d}t\geqslant 0\ \forall\ v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}\tag{7.4.17}$$

令 $\psi(t)=-\hat{\psi}(t)$。用 $H(y,\psi,u)$ 的定义，式(7.4.17)可写为

$$E\int_0^T H(y^*(t),\psi(t),v(t))\mathrm{d}t\leqslant E\int_0^T H(y^*(t),\psi(t),u^*(t))\mathrm{d}t$$

$$\forall\ v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}\tag{7.4.18}$$

对任一 $u\in U_{ad}$，令

$$\lambda(t)=H(y^*(t),\psi(t),u^*(t))-H(y^*(t),\psi(t),u)$$

$$e=\{(t,\omega)\mid(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega,\lambda(t)<0\}$$

如果集合 e 的关于 $\mathrm{d}t\mathrm{d}P$ 的测度 $\mathrm{mes}\ e>0$。取

$$\hat{v}(t)=\begin{cases}u,\text{当}(t,\omega)\in e\\ u^*(t),\text{当}(t,\omega)\notin e\end{cases}$$

则 $\hat{v}(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$。将 $\hat{v}(t)$ 代入式(7.4.18)，得

$$E\int_e\lambda(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$$

另一方面，由 $\mathrm{mes}\ e>0$ 和在集 e 上，$\lambda(t)<0$，则有

$$E\int_e\lambda(t)\mathrm{d}t<0$$

这是一矛盾。因此，必须 $\mathrm{mes}\ e=0$。即是 $\lambda(t)\geqslant 0$，a.s.，a.e. $t\in[0,T]$。因此，最大值原理(7.4.13)成立。

在下一节，将要证明过程对$(\psi(\cdot),\Psi(\cdot))$满足随机发展方程(7.4.12)。

§7.5 协 态 过 程

在§7.4 中，我们已经证明了存在唯一元素对$(\psi(\cdot),\Psi(\cdot))$

$\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V)\times L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H))$，使得最大值原理成立。在这一节，我们要证明元素对$(\psi(\cdot),\Psi(\cdot))$满足随机发展方程(7.4.12)。元素对$(\psi(\cdot),\Psi(\cdot))$称为协态过程，协态过程满足的随机发展方程(7.4.12)称为协态方程。

对任一固定的$s\in[0,T]$，$\forall\ \tau\in[s,T]$，令

$$r(s,\tau)=E\{\hat{\psi}(s)-U^*(T,s)h_\xi(y^*(T))$$
$$-\int_s^T U^*(t,s)(f_\xi(t)+g_\xi^*(t)\hat{\psi}(t)+\sigma_\xi^*(t)\Psi(t))\mathrm{d}t\,|\,\mathscr{F}_\tau\}$$

其中，$f_\xi(t)+g_\xi^*(t)\hat{\psi}(t)+\sigma_\xi^*(t)\Psi(t)=f_\xi(y^*(t),u^*(t))+g_\xi^*(y^*(t),u^*(t))\hat{\psi}(t)+\sigma_\xi^*(y^*(t))\Psi(t)$；$E\{\cdot\,|\,\mathscr{F}_\tau\}$表示条件期望。

则对$\forall\ s\in[0,T]$固定，$r(s,t)$是$\{\mathscr{F}_t\}$一鞅。用引理6.8的鞅的表现定理，存在唯一的$\Psi(t,s)$：

$$\Psi(\cdot,s)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H))$$

使得

$$r(s,\tau)=\int_0^\tau \Psi(t,s)\mathrm{d}w_t \tag{7.5.1}$$

对任意给定的$(\tilde{\phi}(\cdot),\tilde{\Phi}(\cdot))$：

$$(\tilde{\phi}(\cdot),\tilde{\Phi}(\cdot))\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V')\times L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H)),$$

在式(7.4.14)中，取

$$\phi(t)=-g_\xi(y^*(t),u^*(t))\rho(t)+\tilde{\phi}(t)$$
$$\Phi(t)=-\sigma_\xi(y^*(t))\rho(t)+\tilde{\Phi}(t)$$

则方程(7.4.14)可写为

$$\mathrm{d}\rho(t)+A(t)\rho(t)\mathrm{d}t=\tilde{\phi}(t)\mathrm{d}t+\tilde{\Phi}(t)\mathrm{d}w_t \tag{7.5.2}$$
$$\rho(0)=0$$

将上述的$\phi(t)$，$\Phi(t)$和$\rho(t)$代入式(7.4.15)，得

$$E\int_0^T\langle\hat{\psi}(t),\tilde{\phi}(t)\rangle\mathrm{d}t+E\int_0^T\ll\Psi(t),\tilde{\Phi}(t)\gg\mathrm{d}t$$
$$=E\int_0^T\langle(f_\xi(t)+g_\xi^*(t)\hat{\psi}(t)+\sigma_\xi(t)\Psi(t),\rho(t)\rangle\mathrm{d}t$$
$$+E\langle h_\xi(y^*(T)),\rho(T)\rangle \tag{7.5.3}$$

在方程(7.5.2)中，取$\tilde{\Phi}(\cdot)=0$，将方程(7.5.2)的解

$$\rho(t) = \int_0^t U(t,s)\tilde{\phi}(s)\mathrm{d}s$$

代入式(7.5.3)，得

$$E\int_0^T\langle\hat{\psi}(s),\tilde{\phi}(s)\rangle\mathrm{d}s = E\int_0^T\langle(f_\xi(t) + g_\xi^*(t)\hat{\psi}(t)$$

$$+ \sigma_\xi^*(t)\Psi(t)),\int_0^t U(t,s)\tilde{\phi}(s)\mathrm{d}s\rangle\mathrm{d}t$$

$$+ E\langle h_\xi(y^*(T)),\int_0^T U(T,s)\tilde{\phi}(s)\mathrm{d}s\rangle$$

$$= \int_0^T\langle U^*(T,s)h_\xi(y^*(T)) + \int_s^T U^*(t,s)(f_\xi(t) + g_\xi^*(t)\hat{\psi}(t)$$

$$+ \sigma_\xi^*(t)\Psi(t))\mathrm{d}t,\tilde{\phi}(s)\rangle\mathrm{d}s \quad \forall\ \tilde{\phi}(\cdot) \in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V')$$

对$\forall\ \tau\in[0,s]$，由上式得

$$E\int_0^T E^{\mathscr{F}_\tau}\langle\hat{\psi}(s) - U^*(T,s)h_\xi(y^*(T)) - \int_s^T U^*(t,s)(f_\xi(t)$$

$$+ g_\xi^*(t)\hat{\psi}(t) + \sigma_\xi^*(t)\Psi(t))\mathrm{d}t,\tilde{\phi}(s)\rangle\mathrm{d}s = 0$$

$$\forall\ \tilde{\phi}(\cdot) \in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V')$$

其中，$E^{\mathscr{F}_\tau}$表示对 σ-域 $\mathscr{F}_\tau$ 的条件期望。

由上式可得

$$E^{\mathscr{F}_\tau}(\hat{\psi}(s) - U^*(T,s)h_\xi(y^*(T)) - \int_s^T U^*(t,s)(f_\xi(t)$$

$$+ g_\xi^*(t)\hat{\psi}(t) + \sigma_\xi^*(t)\Psi(t))\mathrm{d}t = 0 \quad \forall\ \tau \in [0,s]$$

因此，$r(s,\tau)=0,\forall\ \tau\in[0,s]$。由公式(7.5.1)得 $\Psi(t,s)=0,\forall\ t\in[0,s]$

在公式(7.5.1)中，取 $\tau=T$，用 $r(s,T)$的定义得

$$\hat{\psi}(s) - U^*(T,s)h_\xi(y^*(T)) - \int_s^T U^*(t,s)(f_\xi(t)$$

$$+ g_\xi^*(t)\hat{\psi}(t) + \sigma_\xi^*(t)\Psi(t))\mathrm{d}t = \int_s^T \Psi(t,s)\mathrm{d}w_t \quad (7.5.4)$$

对任一固定的 $\tau\in[0,T]$，任意的 $\hat{\Phi}(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H))$，选取$(\tilde{\phi}(\cdot),\tilde{\Phi}(\cdot))\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V')\times L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H))$如下：

$$\tilde{\phi}(\cdot) = 0$$

$$\tilde{\Phi}(s)=\begin{cases}0 & ,\text{当 } s\in[0,\tau]\\ U(s,T)\hat{\Phi}(s) & ,\text{当 } s\in[\tau,T]\end{cases}$$

将上面定义的$(\tilde{\varphi}(\cdot),\tilde{\Phi}(\cdot))$代入方程(7.5.2)得该方程的解

$$\rho(t)=\begin{cases}0 & ,\text{当 } t\in[0,\tau]\\ \int_\tau^t U(t,s)U(s,\tau)\hat{\Phi}(s)\mathrm{d}w_s=\int_\tau^t U(t,\tau)\hat{\Phi}(s)\mathrm{d}w_s & ,\text{当 } t\in[\tau,T]\end{cases}$$

将上述的$(\tilde{\varphi}(\cdot),\tilde{\Phi}(\cdot))=(0,\tilde{\Phi}(\cdot))$和$\rho(t)$代入式(7.5.3),得

$$E\int_0^T \ll \Psi(t),\tilde{\Phi}(t)\gg \mathrm{d}t=E\langle h_z(y^*(T)),\int_\tau^T U(T,\tau)\hat{\Phi}(s)\mathrm{d}w_s\rangle$$
$$+E\int_0^T\langle (f_z(t)+g_z^*(t)\hat{\varphi}(t)+\sigma_z^*(t)\Psi(t)),\int_\tau^t U(t,\tau)\hat{\Phi}(s)\mathrm{d}w_s\rangle \mathrm{d}t \tag{7.5.5}$$

在式(7.5.4)中,令$s=\tau$后,用

$$-\int_\tau^T \hat{\Phi}(t)\mathrm{d}w_t$$

在式(7.5.4)两端取内积,然后取数学期望,得

$$-E\int_\tau^T \ll \Psi(t,\tau),\hat{\Phi}(t)\gg \mathrm{d}t=E\langle U^*(T,\tau)h_z(y^*(T)),\int_\tau^T\hat{\Phi}(s)\mathrm{d}w_s\rangle$$
$$+E\int_\tau^T\langle U^*(t,\tau)(f_z(t)+g_z^*(t)\hat{\varphi}(t)+\sigma_z^*(t)\Psi(t)),\int_\tau^t\hat{\Phi}(s)\mathrm{d}w_s\rangle \mathrm{d}t \tag{7.5.6}$$

比较式(7.5.5)与(7.5.6),得

$$E\int_\tau^T \ll \Psi(t,\tau)+U^*(t,\tau)\Psi(t),\hat{\Phi}(t)\gg \mathrm{d}t=0$$
$$\forall\ \hat{\Phi}(\cdot)\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H))。$$

由此可得

$$\Psi(t,\tau)=-U^*(t,\tau)\Psi(t)\quad \forall\ \tau\in[0,T]$$

将上式$\Psi(t,\tau)$的表达式代入式(7.5.4)的右端,得

$$\hat{\varphi}(s)=U^*(T,s)h_z(y^*(T))+\int_s^T U^*(t,s)(f_z(t)+g_z^*(t)\hat{\varphi}(t)$$

$$+\sigma_\xi^*(t)\Psi(t))\mathrm{d}t-\int_s^T U^*(t,s)\Psi(t)\mathrm{d}w_t \quad \forall s\in[0,T] \tag{7.5.7}$$

注意到在§7.4中的$\hat{\psi}(s)=-\psi(s)$和由式(7.5.7)得到协态过程$(\psi(t),\Psi(t))$满足§7.4中的定理7.4的随机发展方程(7.4.12)。这就完全证明了定理7.4。

§7.6 最优控制的充分条件

在§7.4中，定理7.4的最优控制满足的最大值原理是最优控制满足的必要条件。在这一节，在定理7.4的必要条件的基础之上，加强条件便可得到充分条件。

定理7.5 在定理7.4的条件下，再设g,σ,f和h关于x和u属于c^2类，g和σ的所有导数有界，f和h的二阶导数有界，$U_{ad}\subset U$，$u^*(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$是一个容许控制，$y^*(t),t\in[0,T]$是相应于容许控制的容许轨道，并且存在过程对$(\psi(\cdot),\Psi(\cdot))\in L^2_{\mathscr{F}}((0,T),V)\times L^2_{\mathscr{F}}((0,T),\mathscr{L}^2(E,H))$，使得$(y^*(t),\psi(t),\Psi(t),u^*(t))$满足

(1)随机发展方程

$$\mathrm{d}y^*(t)+A(t)y^*(t)\mathrm{d}t=g(y^*(t),u^*(t))\mathrm{d}t+\sigma(y^*(t))\mathrm{d}w_t \tag{7.6.1}$$

$$y^*(0)=y_0$$

$$-\mathrm{d}\psi(t)+A^*(t)\psi(t)\mathrm{d}t=\{-f_\xi(y^*(t),u^*(t))$$
$$+g_\xi(y^*(t),u^*(t))\psi(t)-\sigma_\xi(y^*(t))\Psi(t)\}\mathrm{d}t+\Psi(t)\mathrm{d}w_t \tag{7.6.2}$$

$$\psi(T)=-h_\xi(y^*(T))$$

(2)极值原理

$$\langle H_u(y^*(t),\psi(t),u^*(t)),v(t)-u^*(t)\rangle\leqslant 0,$$
$$\forall v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad},a.s.,a.e. \tag{7.6.3}$$

其中

$$H(y,\psi,u)=-f(y,u)+(\psi,g(y,u))_H$$

(3)凸性条件

$$E\left\{(\hat{\xi},\hat{u})\begin{pmatrix}\widetilde{H}_{\xi\xi},\widetilde{H}_{\xi u}\\ \widetilde{H}_{u\xi},\widetilde{H}_{uu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\xi}\\ \hat{u}\end{pmatrix}\right\}\geqslant 0,a.e.t,\forall\ \hat{\xi}\in H,\hat{u}\in U \tag{7.6.4}$$

$$h_{\xi\xi}\geqslant 0 \tag{7.6.5}$$

其中

$$\widetilde{H}(y,\varphi,u,\Psi)=-H(y,\psi,u)+\ll\Psi,\sigma\gg$$

和在式(7.6.4)中的 $\widetilde{H}$ 的变元(y,ψ,u,Ψ)用$(y,\psi(t),u,\Psi(t))$代入，$(y,u)\in H\times U$ 任意。

则 $u^*(t)$是控制问题(7.1.4)—(7.1.5)的最优控制。

如果$(y^*(t),\psi(t),\Psi(t),u^*(t))$除满足上面的条件外，还满足

$$\widetilde{H}_{uu}(y,\psi(t),u,\Psi(t))\geqslant\beta I\quad\forall\ y\in H,u\in U,a.s.,a.e.t \tag{7.6.6}$$

$$E(\widetilde{H}_{\xi\xi}-\widetilde{H}_{\xi u}\widetilde{H}_{uu}^{-1}\widetilde{H}_{u\xi})\hat{x}\hat{x}\geqslant 0\quad\forall\ \hat{x}\in H \tag{7.6.7}$$

其中 $\beta>0$ 是常数，I 是空间 U 中的单位不变算子。则最优控制是唯一的。

证　对任一容许控制 $v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，让 $y(\cdot)$是相应于容许控制 $v(\cdot)$的容许轨道。令

$$\tilde{u}(t)=v(t)-u^*(t),\tilde{y}(t)=y(t)-y^*(t)$$

则

$$\begin{aligned}J(v(\cdot))&=E\int_0^T f(y^*(t)+\tilde{y}(t),u^*(t)+\tilde{u}(t))\mathrm{d}t+Eh(y^*(T)+\tilde{y}(T))\\&=J(u^*(\cdot))+E\langle h_\xi(y^*(T)),\tilde{y}(T)\rangle\\&\quad+E\int_0^T\{\langle f_\xi(y^*(t),u^*(t)),\tilde{y}(t)\rangle+\langle f_u(y^*(t),u^*(t)),\tilde{u}(t)\rangle\}\mathrm{d}t\\&\quad+E\int_0^T\int_0^1\int_0^1\lambda\{f_{\xi\xi}(y^*+\lambda\mu\tilde{y},u^*+\lambda\mu\tilde{u})\tilde{y}\tilde{y}\\&\quad+2f_{\xi u}(y^*+\lambda\mu\tilde{y},u^*+\lambda\mu\tilde{u})\tilde{y}\tilde{u}\\&\quad+f_{uu}(y^*+\lambda\mu\tilde{y},u^*+\lambda\mu\tilde{u})\tilde{u}\tilde{u}\}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}t\\&\quad+E\int_0^1\int_0^1\lambda h_{\xi\xi}(y^*(T)+\lambda\mu\tilde{y}(T))\tilde{y}(T)\tilde{y}(T)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\end{aligned} \tag{7.6.8}$$

由假设 $y^*(t),y(t)$分别是相应于容许控制 $u^*(t),v(t)$的容许

轨道。因此，$\tilde{y}(t)$满足下面的随机发展方程

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{y}(t) + A(t)\tilde{y}(t)\mathrm{d}t &= (g(y,v) - g(y^*,v^*))\mathrm{d}t \\
&\quad + (\sigma(y) - \sigma(y^*))\mathrm{d}w_t \\
&= \{g_\xi(y^*,u^*)\tilde{y} + g_u(y^*,u^*)\tilde{u} \\
&\quad + \int_0^1\int_0^1 \lambda[g_{\xi\xi}(y^* + \lambda\mu\tilde{y},u^* + \lambda\mu\tilde{u})\tilde{y}\tilde{y} \\
&\quad + 2g_{\xi u}(y^* + \lambda\mu\tilde{y},u^* + \lambda\mu\tilde{u})\tilde{y}\tilde{u} \\
&\quad + g_{uu}(y^* + \lambda\mu\tilde{y},u^* + \lambda\mu\tilde{u})\tilde{u}\tilde{u}]\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\}\mathrm{d}t \\
&\quad + \left\{\sigma_\xi(y^*)\tilde{y} + \int_0^1\int_0^1 \lambda\sigma_{\xi\xi}(y^* + \lambda\mu\tilde{y})\tilde{y}\tilde{y}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\right\}\mathrm{d}w_t
\end{aligned}
\tag{7.6.9}
$$

$$\tilde{y}(0) = 0$$

对于满足随机微分方程(7.6.2)的$\psi(t)$和随机微分方程(7.6.9)的$\tilde{y}(t)$，对泛函$\langle x,y\rangle$用 Itô 微分公式有

$$
\begin{aligned}
E\int_0^T \langle \mathrm{d}\psi(t),\tilde{y}(t)\rangle &= E\int_0^T \mathrm{d}\langle \psi(t),\tilde{y}(t)\rangle \\
&\quad - E\int_0^T \langle \psi(t),\mathrm{d}\tilde{y}(t)\rangle - E\int_0^T \langle \mathrm{d}\psi(t),\mathrm{d}\tilde{y}(t)\rangle \\
&= - E\langle h_\xi(y^*(T)),\tilde{y}(T)\rangle + E\int_0^T \langle \psi(t), A(t)\tilde{y}(t)\rangle\mathrm{d}t \\
&\quad - E\int_0^T \langle \psi(t),g_\xi\tilde{y} + g_u\tilde{u} + \int_0^1\int_0^1 \lambda[g_{\xi\xi}\tilde{y}\tilde{y} + 2g_{\xi u}\tilde{y}\tilde{u} \\
&\quad + g_{uu}\tilde{u}\tilde{u}]\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\rangle\mathrm{d}t \\
&\quad + E\int_0^T \ll \Psi(t),\sigma_\xi(y^*)\tilde{y} + \int_0^1\int_0^1 \lambda\sigma_{\xi\xi}\tilde{y}(t)\tilde{y}(t)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda \gg \mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{7.6.10}
$$

注意到$\psi(t)$满足随机微分方程(7.6.2)和终端条件，由式(7.6.10)得

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^T \langle f_\xi(y^*(t),u^*(t)),\tilde{y}(t)\rangle\mathrm{d}t + E\langle h_\xi(y^*(T)),\tilde{y}(T)\rangle \\
&= E\int_0^T \langle \mathrm{d}\psi(t),\tilde{y}(t)\rangle\mathrm{d}t - E\int_0^T \langle A^*(t)\psi(t),\tilde{y}(t)\rangle\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$+ E\int_0^T \langle g_\xi^* (y^*(t), u^*(t))\psi(t), \tilde{y}(t)\rangle \mathrm{d}t$$

$$- E\int_0^T \langle \sigma_\xi^* (y^*(t))\Psi(t), \tilde{y}(t)\rangle \mathrm{d}t + E\langle h_\xi(y^*(T)), \tilde{y}(T)\rangle$$

$$= - E\int_0^T \langle \psi(t), g_u\tilde{u} + \int_0^1\int_0^1 \lambda[g_{\xi\xi}\tilde{y}\tilde{y} + 2g_{\xi u}\tilde{y}\tilde{u}$$

$$+ g_{uu}\tilde{u}\tilde{u}]\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\rangle \mathrm{d}t$$

$$+ E\int_0^T \langle\langle \Psi(t), \int_0^1\int_0^1 \lambda\sigma_{\xi\xi}\tilde{y}\tilde{y}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda \rangle\rangle \mathrm{d}t \tag{7.6.11}$$

将式(7.6.11)代入式(7.6.8)的右端，得

$$J(v(\cdot)) = J(u^*(\cdot)) + E\int_0^T \langle f_u(y^*(t), u^*(t)), \tilde{u}(t)\rangle \mathrm{d}t$$

$$- E\int_0^T \langle g_u^* (y^*(t), u^*(t))\psi(t), \tilde{u}(t)\rangle \mathrm{d}t$$

$$- E\int_0^T \langle \psi(t), \int_0^1\int_0^1 \lambda[g_{\xi\xi}\tilde{y}\tilde{y} + 2g_{\xi u}\tilde{y}\tilde{u} + g_{uu}\tilde{u}\tilde{u}]\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\rangle \mathrm{d}t$$

$$+ E\int_0^T\int_0^1\int_0^1 \lambda\{f_{\xi\xi}\tilde{y}\tilde{y} + 2f_{\xi u}\tilde{y}\tilde{u} + f_{uu}\tilde{u}\tilde{u}\}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}t$$

$$+ E\int_0^T \langle\langle \Psi(t), \int_0^1\int_0^1 \lambda\sigma_{\xi\xi}\tilde{y}\tilde{y}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda \rangle\rangle \mathrm{d}t$$

$$+ E\int_0^1\int_0^1 \lambda h_{\xi\xi}\tilde{y}(T)\tilde{y}(T)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda$$

$$= J(u^*(\cdot)) - E\int_0^T \langle H_u(y^*(t), \psi(t), u^*(t)), \tilde{u}(t)\rangle \mathrm{d}t$$

$$+ E\int_0^T\int_0^1\int_0^1 \lambda(\tilde{y}, \tilde{u})\begin{pmatrix} \widetilde{H}_{\xi\xi}, \widetilde{H}_{\xi u} \\ \widetilde{H}_{u\xi}, \widetilde{H}_{uu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}t$$

$$+ E\int_0^1\int_0^1 \lambda h_{\xi\xi}\tilde{y}(T)\tilde{y}(T)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda \tag{7.6.12}$$

用条件(7.6.3)、(7.6.4)、(7.6.5)，由式(7.6.12)，得

$$J(v(\cdot)) \geqslant J(u^*(\cdot)), \forall\, v(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad}$$

因此，$u^*(t)$是最优控制。

现在证明除定理的条件(1)、(2)和(3)外，再加上条件(7.6.6)和(7.6.7)，最优控制是唯一的。

事实上，由条件(7.6.6)，算子$\widetilde{H}_{uu}(y, \psi(t), u, \Psi(t))$的逆算子

$\widetilde{H}^{-1}(y,\varphi(t),u,\Psi(t))$存在。于是

$$\widetilde{H}_{\xi\xi}\tilde{y}\tilde{y}+2\widetilde{H}_{\xi u}\tilde{y}\tilde{u}+H_{uu}\tilde{u}\tilde{u}$$
$$=\widetilde{H}_{uu}(\tilde{u}+\widetilde{H}_{uu}^{-1}\widetilde{H}_{\xi u}\tilde{y})(\tilde{u}+\widetilde{H}_{uu}^{-1}H_{u\xi}\tilde{y})$$
$$+(\widetilde{H}_{\xi\xi}-\widetilde{H}_{\xi u}\widetilde{H}_{uu}^{-1}\widetilde{H}_{u\xi})\tilde{y}\tilde{y}$$

对上式两端取数学期望和用条件(7.6.7)和(7.6.6),得

$$E\{\widetilde{H}_{\xi\xi}\tilde{y}\tilde{y}+2H_{\xi u}\tilde{y}\tilde{u}+H_{uu}\tilde{u}\tilde{u}\}$$
$$=E\{\widetilde{H}_{uu}(\tilde{u}+\widetilde{H}_{uu}^{-1}\widetilde{H}_{\xi u}\tilde{y})(\tilde{u}+\widetilde{H}_{uu}^{-1}\widetilde{H}_{u\xi}\tilde{y})$$
$$+E(\widetilde{H}_{\xi\xi}-\widetilde{H}_{\xi u}\widetilde{H}_{uu}^{-1}\widetilde{H}_{u\xi})\tilde{y}\tilde{y}$$
$$\geqslant E\{\widetilde{H}_{uu}(\tilde{u}+\widetilde{H}_{uu}^{-1}\widetilde{H}_{\xi u}\tilde{y})(\tilde{u}+\widetilde{H}_{uu}^{-1}\widetilde{H}_{u\xi}\tilde{y})\}$$
$$\geqslant \beta E\|\tilde{u}+\widetilde{H}_{uu}^{-1}\widetilde{H}_{\xi u}\tilde{y}\|^2 \tag{7.6.13}$$

如果$v(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$也是最优控制,则$J(v(\cdot))=J(u^*(\cdot))$,则由式(7.6.12),得

$$E(\tilde{y},\tilde{u})\begin{pmatrix}\widetilde{H}_{\xi\xi},\widetilde{H}_{\xi u}\\ \widetilde{H}_{u\xi},\widetilde{H}_{uu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{y}\\ \tilde{u}\end{pmatrix}=0,a.e.t \tag{7.6.14}$$

由式(7.6.13)和式(7.6.14),得

$$E\|\tilde{u}+\widetilde{H}_{uu}^{-1}\widetilde{H}_{\xi u}\tilde{y}\|^2=0,a.e.t$$

由此得

$$\tilde{u}(t)=-\widetilde{H}_{uu}^{-1}\widetilde{H}_{\xi u}\tilde{y} \tag{7.6.15}$$

将式(7.6.15)的$\tilde{u}(t)$表达式代入关于$\tilde{y}(t)$的随机发展方程(7.6.9),得

$$\begin{aligned}
&d\tilde{y}(t)+A(t)\tilde{y}(t)dt=(g(y^*+\tilde{y},u^*+\tilde{u})-g(y^*,u^*))dt\\
&\quad+(\sigma(y^*+\tilde{y})-\sigma(y^*))dw_t\\
&=\{g_\xi(y^*+\theta\tilde{y},u^*-\theta\widetilde{H}_{uu}^{-1}\widetilde{H}_{u\xi}\tilde{y})\tilde{y}\\
&\quad-g_u(y^*+\theta\tilde{y},u^*-\theta\widetilde{H}_{uu}^{-1}\widetilde{H}_{u\xi}\tilde{y})\widetilde{H}_{uu}^{-1}\widetilde{H}_{u\xi}\tilde{y}\}dt\\
&\quad+\sigma_\xi(y^*+\theta\tilde{y})\tilde{y}dw_t
\end{aligned} \tag{7.6.16}$$
$$\tilde{y}(0)=0$$

其中$\theta\in(0,1)$。

对随机发展方程(7.6.16)用Itô公式然后取数学期望,得

$$E|\tilde{y}(t)|^2+2E\int_0^t\langle A(s)\tilde{y}(s),\tilde{y}(s)\rangle ds$$

$$= 2E\int_0^t \langle \tilde{y}(s), g_z(\cdot,\cdot)\tilde{y} - g_u(\cdot,\cdot)\widetilde{H}_{uu}^{-1}\widetilde{H}_{uz}\tilde{y}\rangle \mathrm{d}s$$

$$+ E\int_0^t \mathrm{tr}(\sigma_z\tilde{y})^*(\sigma_z\tilde{y})\mathrm{d}s$$

用关于 g 和 σ 的导数是有界的假定，由上式存在正常数 c，使得

$$E|\tilde{y}(t)|^2 \leqslant cE\int_0^t |\tilde{y}(s)|^2\mathrm{d}s, \text{对} \ \forall \ t \in [0,T]$$

由此可得 $E|\tilde{y}(t)|^2=0$，$a.e.\ t\in[0,T]$。因此 $\tilde{y}(t)=0$，$a.e.\ t$，$a.s.$。由式(7.6.15)得 $\tilde{u}(t)=0$，$a.e.\ t$，$a.s.$ 因此 $u^*(t)=v(t)$，$a.e.\ t$，$a.s.$。这就证明了最优控制的唯一性。 证毕

参考文献

1 Pontryagin L S, Boltyaskii V G, Gamkrelidge R V, et al. The Mathematical Theory of Optimal Processes. New York, London, John Wiley & Sons Inc, 1962

2 Gamkrelidge R V. 最优控制理论基础. 姚允龙译. 上海:复旦大学出版社, 1984

3 关肇直, 韩京清, 秦化淑等. 极值控制与极大值原理. 北京:科学出版社, 1980

4 袁著祉, 阮荣耀, 高龙等. 现代控制理论在工程中的应用. 北京:科学出版社, 1985

5 张恭庆. 临界点理论及其应用. 上海:科学技术出版社, 1986

6 Bensoussan A. Methodes de Pertubations en Controle Optimal. Dund; Gauthier-Villars, 1988

7 Li X J, Chow S N. Maximum principle of optimal control for functional differential systems. Journal of optimal theory and application, 1987, 54(2): 335～360

8 Li X J, Yao Y L. Maximum principle of distributed parameter systems. Lecture Notes in Mathematics, 1984

9 王康宁. 分布参数控制系统. 北京:科学出版社, 1986

10 王康宁. 一类分布参数控制系统的边界控制与边界观测. 应用数学学报, 1981(3): 280～290

11 李训经, 姚允龙. 分布参数系统的时间最优控制. 中国科学, 1980(7): 619～627

12 Li X J, Yao Y L. Maximum principle of distributed parameter systems with time lages Lecture Notes in Control and Information Sciences, 1985, 75: 410～427

13 Aziz A K (Ed). *Control Theory of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Inc. Academic press, 1977

14 Ray W H, Lainiotis (Ed). Distributed Parameter Systems. Inc. Marcel Dekker, 1978

15 Ahmed N V, Teo K L. Optimal Control of Distributed Parameter Systems. North Holland, New York; Oxford, 1982

16 Tzafestas Spyros G (Ed). Distributed Parameter Control Systems. Theory and Application International Series on Systems and Control. Pergmon Press, 1982, 6

17 Krylov N V. Controlled Diffusion Processes. New York; Springer-Verlay, 1980

18 Nisio M. Stochastic Control Theory. Lectrue Notes. ISI9. 1980

19 Fleming W F, Rished R W. Deterministic and Stochastic Control. New York: Springer, 1975

20 Nisio M. Some remarks in stochastic optimal controls. 3rd USSR-Japan Symp Prob Theo Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1976. 550

21 Nisio M. Remarks on stochastic optimal control. Japan Jour Math, 1975(1): 159～183

22 Krylov N V. The control of the solution of a stochastic integral equation. The Prob Appl,

17:111~131

23 Nisio M. On stochastic optimal controls and envelope of Markovian semigroups. Proc In tern Symp S D G Kyoto, 1976. 297~325

24 Nisio M. On a nonlinear semigroup attached to stochastic optimal control. Publ Res Inst Math. Sci, 1976, 3; 513~537

25 Fleming W H. Nisio M. On the existence of optimal stochastic control. J Math Mech, 1966, 15: 777~794

26 Davis M H A. Nonlinear semigroup in the control of partially observable stochastic systems. In: Measure Theory and Applecations to Stochastic Analysis. Lecture Notes in Mathematics, 1978, 695

27 Bismut J M. Un Probleme de contrôlle stochastique avec observation partialle. Z Wahrsch. Verw. Gebiete, 1979, 49: 63~95

28 Haussmann U G. Existence of partially observable stochastic optimal control. Pro 3rd Working Conference of Stochastic Differential Systems. In: Control and Information Science. New York: Springer, 1978

29 Fleming W H. Meassured-valued processes in the control of parlially-observable stochastic systems. Applied Mathe Optim, 1980(6): 217~285

30 Christopeit N. Existence of optimal stochastic controls under partial observationl. Z Warsch. Verw. Geblele, 1980, 51: 201~213

31 Fleming W H, Pardoux E. Optimal control for partially observed diffusions. SIAM J Cont and Opti, 1982, 20(2): 261~285

32 Fleming W H. Nonlinear seingroup for controlled parlially observed diffusion. SIAM J Cont and Opti, 1982, 20(2): 286~301

33 Bismut J M. Partially observed diffusion and their control. SIAM J Cont and Opti, 1982, 20(2): 302~309

34 Kwakenank H. A minimum principle for stochastic control problems with output feedback. Systems and Control Letters, 1981, 1(1): 190~193

35 Bensoussan A. Maximum principle and dynamic programing approches of the optimal control of partially observed diffusion. Stochastics, 1983, 9: 169~222

36 Gikham I I, Skorokhd A V Stochastic Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1972

37 Ikeda N. Walanable S. Stochastic Differential Equations. New York: Northe-Holland, 1981.

38 Stroock D W., Varadham S R S. Multidimensional Diffusion Processes. New York: Springer-Verlag, 1979

39 Friedman A. Stochastic Differenlial Equalions and Applications. New York: Academic

Press, 1975, Volume 1

10 Bensoussan A., Viot M. Optimal control of stochastic linear distributed parameter systems. SIAM J Control, 1975, 13(4): 901～926

11 Bensoussan A. Stochastic maximum principle for distibuted parameter systems J Franklin. Inst, 1983, 315(5～6): 387～406

42 王康宁. 随机分布参数系统的最优控制的充分条件. 控制理论及其应用年会论文集, 1988, 289～292

43 Bensoussan A. *On the separation principle* for distibuted *parameter* systems IFAC. Conference on control for distributed parameter systems. Bamff, Canad: 1971

44 Whonham W M. On the separation theorem of stochastic control. SIAM, J Control, 1968, (6): 312～326

45 Kushner H J. On the optimal control of a system governed by a linear parabalic equation with noise inputs. SIAM, J Control, 1968(6): 596～614

46 Fleming W H. Distributed parameter stochastic systems in population biology. International Symposium, INIA, June 1974. In: Economics and Mathematical Systems, 1974, 107: 179～191

47 Bensoussan A. Controle Optimal Stochastique de Sysemes Governe's par des E'quations aux d'erive'es Partielles. Rerdi Condi di Mathematica, 1969

48 王康宁. 随机偏微分方程的最优控制. 控制理论及其应用年会文集, 1992, 497～501

49 Bensoussan A. Stochastic Control by Functional Analysis Methods. Amsterdam: Northt Holland, 1982

50 Lions P L. Generaliged Solutions of Hamilton-Jacobi Equations. London: Pitman, 1982

51 Lions P L. Viscosity solution of fully nonlinear second equation and optimal stochastic control in infinite dimensions, Part Ⅰ: Optimal control of Zakai's equation. Math, 1989, 1390: 147～170

52 Bansoussan A. On the integrand formulation of Zakai and Kushner equations. Math, 1989, 1390: 11～23

53 Baras J, Robert J, Kohlmann M. The partially observed stochastic minimum primciple. SIAM, J Cont & Opti, 1989, 27(6): 1279～1292

54 Haussmann V G. The maximum principle for optimal control of diffusions with partial information. SIAM, J Cont & Opti, 1987, 25(2): 342～361

55 Bashirov A E. Optimal control of partially observed systems with arbitrary dependent noises: linear quadratic case. Stochastics, 1986, 17: 163～205

56 Haussmann V G. Examples of optimal controls for linear stochastic control systems with partial observation. Stochastics, 1987, 22: 289～323

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229~240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966~979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265~285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159~180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1~13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137~169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349~367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83~88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Fllo W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229~240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966~979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265~285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159~180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1~13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137~169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349~367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83~88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229~240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966~979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265~285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159~180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1~13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137~169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Fllo W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349~367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83~88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229~240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966~979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265~285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159~180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1~13

62 Zhou X Y. A unified treatnment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137~169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349~367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philade-phia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83~88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229~240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966~979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265~285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159~180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1~13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137~169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349~367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83~88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229~240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966~979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265~285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159~180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1~13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137~169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349~367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83~88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Fllo W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229~240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966~979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265~285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159~180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1~13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137~169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349~367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83~88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229~240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966~979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265~285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159~180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1~13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137~169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Fllo W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349~367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83~88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229~240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966~979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265~285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159~180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1~13

62 Zhou X Y. A unified treatnment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137~169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Fllo W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349~367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83~88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229~240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966~979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265~285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159~180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1~13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137~169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph D Thesis, 1992

64 Fllo W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349~367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83~88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229~240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966~979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265~285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159~180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1~13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137~169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349~367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83~88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13

62 Zhou X Y. A unified treatnment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Fllo W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229~240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966~979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265~285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159~180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1~13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137~169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349~367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83~88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229~240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966~979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265~285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159~180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1~13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137~169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349~367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83~88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philade-phia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph D Thesis, 1992

64 Filo W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229~240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966~979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265~285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159~180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1~13

62 Zhou X Y. A unified treatnment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137~169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph D Thesis, 1992

64 Fllo W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349~367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83~88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240
58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979
59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285
60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180
61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13
62 Zhou X Y. A unified treatnment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169
63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992
64 Fllo W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367
65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philade-phia: Society for Industrial and Mathematics. 1988
66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229～240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966～979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265～285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159～180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1～13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137～169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph D Thesis, 1992

64 Ello W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349～367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83～88

57 Elliott R J. The optimal control of diffusions. Appl Math Opti, 1990, 22: 229~240

58 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM, J Cont & Opti, 1990, 28(2): 966~979

59 Zhang Q. Controlled partially observed diffusions with correlated noise. Appl Math Opti, 1990, 22: 265~285

60 Hu Y, Peng S G. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. Stochastics and Stochastics Reprots, 1990, 33: 159~180

61 Zhou X Y. The connections between the maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1990, 34: 1~13

62 Zhou X Y. A unified treatment of maximum principle and dymamic programming in stochastic control. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, 36: 137~169

63 Tang S J. Optimal control of stochastic systems with random jump in Hilbert spaces. Funda university, ph. D Thesis, 1992

64 Filo W. convergence of solutions of one-dimensional stochastic heat equations. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(3): 349~367

65 Fleming W H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical perspective. Philadephia: Society for Industrial and Mathematics. 1988

66 Wang K. Maximum principle of the optimal control for the stochastic systems with partially observed information. Jour RESTC, 1994, 1(23): 83~88